

STATSGJELD MEMO

NR. 3 | 2023

OKTOBER 2023

AKSEL BENUM

VETLE Ø. OPHEIM

ERIK S. WASBERG

Estimeringer av terminpremien på norske statsobligasjoner



NORGES BANK

Statsgjeld Memo inneholder utredninger og dokumentasjon skrevet av Norges Banks ansatte og andre forfattere tilknyttet Norges Bank. Synspunkter og konklusjoner i arbeidene er ikke nødvendigvis representative for Norges Bank.

STATSGJELD MEMO
NR 3 | 2023

© 2023 Norges Bank

Det kan siteres fra eller henvises til dette arbeid, gitt at forfatter og Norges Bank oppgis som kilde.

Estimeringer av terminpremien på norske statsobligasjoner

Terminpremien på statsobligasjoner har vært anslått å være lav de siste årene. Det har bidratt til at merkostnaden ved å låne langsiktig har vært relativt liten. Det siste året har terminpremiene økt noe igjen. Dette memoet dokumenterer og diskuterer modellen i Adrian, Crump & Moench (2013) som vi benytter for å vurdere utviklingen i terminpremien på norske statsrenter¹.

Nøkkelord: Terminpremier, statsobligasjoner, rentenes terminstruktur

1. Introduksjon

Norges Bank har ansvaret for å forvalte den norske statsgjelden etter et mandat fra Finansdepartementet. Hovedmålet for forvaltningen er at statens lånebehov skal dekkes til lavest mulig kostnader innenfor gitte risikorammer. Samtidig skal Norges Bank opprettholde en rentekurve med opptil ti års løpetid. En stor del av lånebehovet dekkes med opplåning i obligasjoner med løpetid fra 1 til 20 år.² Det er imidlertid ikke gitt at denne strategien kan forventes å gi staten lavest mulig rentekostnad.

Et uttrykk for forventet merkostnad ved å binde rentekostnaden over lang tid fremfor å låne kort og/eller til flytende rente er den såkalte terminpremien. En positiv terminpremie gjør langsiktig opplåning, alt annet likt, dyrere enn kortsiktig opplåning.

Statsgjeldsforvaltningen i Norges Bank har anledning til å styre gjennomsnittlig rentebindingstid på statsgjelden ved å bruke rentebytteavtaler³. Dersom vi mener at kortsiktig opplåning gir lavere lånekostnader enn langsiktig opplåning, kan vi redusere rentebindingstiden på låneporteføljen ved å inngå rentebytteavtaler hvor staten mottar fastrente og betaler flytende rente. Dette gjør at utstedelsesstrategi og rentebindingstid delvis kan frakobles.

Vurderinger knyttet til bruken av rentebytteavtaler er en viktig grunn til at statsgjeldsforvaltningen i Norges Bank estimerer terminpremiene på norske statsobligasjoner. Anslag på nivået og utviklingen av terminpremien på norske statsobligasjoner er også nyttig for blant annet investorer, ulike aktører i det finansielle systemet og offentligheten ellers.

¹ Synspunktene og konklusjonene i denne publikasjonen er forfatterens egne og deles ikke nødvendigvis av Norges Bank. Forfatterne er ansvarlige for eventuelle feil og mangler. Vi takker Farooq Akram, Gaute Langeland, Kathrine Lund, Anders Svor, Olav Syrstad, Per Marius Pettersen og kollegaer i statsgjeldsforvaltningen for gode innspill og kommentarer.

² De siste årene har en av statsgjeldsforvaltningens målindikatorer vært at minst 50 prosent av lånebehovet skal dekkes ved opplåning i obligasjoner som har mer enn 7 år til forfall. Alle obligasjonene har fastrente og det er ingen avdrag før forfall. Rentebindingstiden på låneporteføljen var på 4,2 år ved utgangen av 2022. Statsgjeldsforvaltningen benytter seg også av tilbakekjøp på statsobligasjoner med under ett år til forfall, noe som øker den effektive løpetiden på statsgjelden.

³ En rentebytteavtale, eller en renteswap, er en avtale mellom to parter hvor en part betaler en fast rente, og den andre parten betaler en flytende rente.

Det er begrenset med studier av utviklingen i terminpremien på norske statsrenter, men tidligere undersøkelser omfatter etter vår kjennskap Wright (2011), Ceballos og Romero (2016) og de Lange, Risstad og Westgaard (2022). Sistnevnte bruker blant annet modellen til Adrian, Crump og Moench (2013), som dette memoet presenterer. Joslin m.fl. (2014), Bauer m.fl. (2015) og Bauer og Rudebusch (2016) har fremgangsmåter for å estimere terminpremien. Moe og Michelsen (2021) undersøker ulike økonomiske variabler som kan predikere den norske terminpremien i perioden 2009 til 2019. De Lange, Risstad og Westgaard (2023) ser på terminpremier i norske swaprenter.

Dette memoet dokumenterer terminpremiemodellen som statsgjeldsforvaltningen i Norges Bank benytter og er disponert som følger. Neste kapittel omhandler terminpremien som konsept. Tredje kapittel tar for seg den teoretiske og empiriske metoden vi bruker for å estimere terminpremien, i tillegg til noen betraktninger knyttet til valg av tidsperiode og en robusthetsanalyse. Fjerde kapittel beskriver utviklingen i terminpremien siden årtusenskiftet. Vi omtaler også en kryssjekk av resultatene fra våre estimeringer i vedlegget.

2. Terminpremien

Forventningshypotesen⁴ sier at renten på en plassering med lang løpetid vil være lik forventet utvikling i kortsiktige renter over den samme perioden. Med denne hypotesen vil en toårig rente være lik gjennomsnittet av to etterfølgende ettårsrenter, eller etterfølgende tremånedersrenter som dekker perioden til denne toårige renten. Risikofrie obligasjoner med ulik løpetid er med andre ord perfekte substitutter.

Forventningshypotesen kan være et godt utgangspunkt for å forstå utviklingen i langsiktige renter. Hypotesen ser imidlertid bort ifra at aktørene i finansmarkedene kan forholde seg til ulike former for risiko, som det normalt vil kreves en premie for. For eksempel kan man anta at de vil kreve en likviditetspremie for å investere i lite likvide verdipapirer. Det kan også antas at det eksisterer en premie som øker med misligholdsrisikoen til utstederen av obligasjonen, gjerne omtalt som kredittpremien. For obligasjoner som ikke er realobligasjoner eller inflasjonssikrede obligasjoner, altså obligasjoner som gir investoren en avkastning som kompenserer for inflasjon, vil investorene også kreve en kompensasjon for usikkerhet knyttet til fremtidig inflasjon.⁵

Normalt vil det være rimelig å anta at investorene vil kreve en premie for plasseringer med lang løpetid. Kursen på en fastrenteobligasjon med lang gjenstående løpetid er mer sensitiv for renteendringer enn kursen på en obligasjon med kort gjenstående løpetid.⁶ Tilsvarende vil en utsteder av en obligasjon måtte akseptere en høyere rente for å «låse» rentenivået sammenlignet med å utstede en obligasjon med flytende rente eller eventuelt ved å rullere flere fastrenteobligasjoner med kortere løpetid.

Kompensasjonen aktørene krever ut over den renten som følger av forventningshypotesen, kalles gjerne terminpremien.⁷

⁴ Se Fischer (1930) og Lutz (1940).

⁵ Bernhardsen (2011) gir en grundig og anvendelig innføring i slike premier.

⁶ Enkelte aktører vil imidlertid ha et behov for å ha lang løpetid på aktividasiden for å balansere forpliktelser langt frem i tid. Kjøp av obligasjoner med lang løpetid vil da kunne være å anse som risikoreducerende.

⁷ I utgangspunktet vil definisjonen av terminpremien, som brukt i dette rammeverket, også kunne inneholde andre premier, for eksempel en kredittpremie eller en likviditetspremie. I denne artikkelen ser vi imidlertid på norske statsrenter hvor kredittpremien kan antas å være lik null og at likviditetspremien ikke avhenger av de ulike løpetidene.

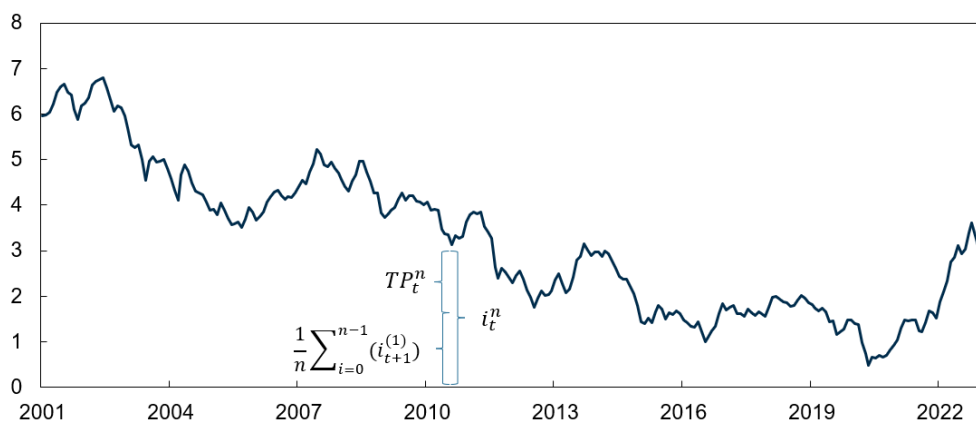
Sammenhengen kan formuleres slik:

$$(2.1.) \quad i_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t(i_{t+i}^{(1)}) + TP_t^n$$

hvor i_t^n er den langsiktige renten med løpetid på n år, $i_{t+i}^{(1)}$ er den kortsiktige renten på tidspunkt $t+i$, og $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E_t(i_{t+i}^{(1)})$ den gjennomsnittlige forventede kortsiktige renten over perioden n , også kjent som den risikonøytrale renten. TP_t^n er terminpremien i den langsiktige renten med løpetid n . Figur 1 viser denne sammenhengen grafisk.

Figur 1: En enkel fremstilling av terminpremien

Nullkupongrente og terminpremie. Prosentenheter.



Kilde: Norges Bank

Terminpremien på n år kan altså defineres som differansen mellom renten med n års løpetid, og gjennomsnittlig forventet kortsiktig rente de neste n årene.

Forventet kortsiktig rente er imidlertid ikke observerbar, og følgelig er også terminpremien en uobserverbar størrelse. Det finnes allikevel ulike metoder som forsøker å dekomponere rentene til en risikonøytral komponent, som er et anslag på gjennomsnittlig forventet kortsiktig rente, og en terminpremie.

3. Metode

Vi bruker en modell for å dekomponere statsrentene i en terminpremie og en forventet kortsiktig rente. Det er ulike metoder og tilnærminger til å estimere terminpremien. Valg av både modell og tidsperiode brukt i estimeringen vil gi utslag på det estimerte nivået på terminpremien. Metoden som i hovedsak anvendes av statsgjeldsforvaltningen i Norges Bank for å estimere terminpremien i norske statsrenter følger Adrian, Crump og Moench (2013), heretter kalt «ACM».

Kim og Wright (2005) er en annen anerkjent metode. Av andre fremgangsmåter for å beregne terminpremien kan Vasicek (1977), Christensen og Rudebusch (2010), Hördahl og Tristani (2014) og Kopp og Williams (2018) nevnes. Videre finnes det også modeller som tar innover seg ulike makroøkonomiske variabler i forklaringen av nivået på obligasjonsrenter, der terminpremien kan inngå, deriblant Ang and Piazzesi (2003), Hördahl, Tristani og Vestin (2006) og Rudebusch og Wu (2008) og Cochen, Hördahl og Xia (2018).

ACM-modellen estimeres med lineære regresjoner, noe som gjør beregningene teknisk enklere å utføre. Som forklart i Cochen, Hördahl og Xia (2018), vil modellen imidlertid kunne «overreagere» på endringer i rentenivået. Dette og andre robusthetsanalyser omtales nærmere i kapittel 5.

3.1 ACM-modellen

Terminpremien er den forventede avkastningen en statsobligasjon med lengre løpetid gir utover forventet kortsiktig rente i en periode. ACM-modellen tar utgangspunkt i at rentenes terminstruktur kan dekomponeres i et sett faktorer, såkalte prinsipalkomponenter.⁸ Videre benyttes minste kvadraters metode (OLS) til å estimere et gjennomsnitt av forventede korte renter over perioden, altså de risikonøytrale rentene. Terminpremien regnes deretter ut som forskjellen mellom nivået på nullkupongrentene og gjennomsnittet av de fremtidige kortsiktige rentene.

En fullstendig gjennomgang av modell og estimeringsmetode finnes i Adrian m.fl. (2013) og er gjengitt i vedlegget.

3.2 Nærmere om valg av tidsperiode

Valg av starttidspunkt for estimeringen er svært relevant ved bruk av ACM-modellen. Når nye observasjoner blir lagt til, endres estimatet av terminpremiene. Årsaken til det er at vektene som brukes til å beregne prinsipalkomponentene beregnes fra hele datasettet. Når datasettet endres, vil også de underliggende korrelasjonene i dataene endres, noe som igjen vil kunne påvirke vektene.

Strukturelle brudd i dataene påvirker også valg av tidsperiode. Et nærliggende eksempel på et strukturelt brudd som er relevant for rentene på norske statspapirer, er innføringen av et nytt pengepolitisk mandat med et inflasjonsmål på 2,5 prosent i mars 2001.⁹ Statsgjeldsforvaltningens estimeringer av den norske terminpremien har 2001 som startdato med dette som hovedargument.

Malik og Meldrum (2014) studerer terminstrukturen til britiske renter og setter startpunktet til mai 1997, samme tid som Bank of England fikk større operasjonell uavhengighet og et lovfestet inflasjonsmål. De viser imidlertid at forlengelse av datagrunnlaget tilbake til introduksjonen av inflasjonsmålet (oktober 1992) i liten grad påvirker de estimerte premiene. Forfatterne gir en forklaring på hvorfor man typisk ser lavere terminpremier ved utvidet beregningsperiode.

I den originale analysen fra Adrian m.fl. (2013) brukes det data fra januar 1987. Den amerikanske sentralbanken Federal Reserve har valgt å offentliggjøre terminpremiene basert på et datasett som går tilbake til 1961 på sine nettsider.¹⁰

ACM-modellen har iboende reverseringseffekter, eller «mean reversion», for den kortsiktige renten. Når kortsiktig rente i dag er betydelig lavere enn gjennomsnittet for hele perioden, forventes den å returnere tilbake til et høyere nivå.¹¹ I modellen er dette

⁸ Prinsipalkomponentanalyse er en statistisk metode som benyttes for å redusere et stort antall variabler til et mindre antall faktorer. De nye faktorene er en lineær transformasjon av de opprinnelige variablene, og er konstruert slik at informasjonstapet ved å redusere antall variabler minimeres.

⁹ Det er imidlertid hevdet at dette inflasjonsmålet i praksis ble tatt i bruk fra januar 1999, se Norges Bank (2022a). Inflasjonsmålet ble i 2018 nedjustert fra 2,5 prosent til 2,0 prosent.

¹⁰ Se Federal Reserve (2023)

¹¹ Dette forutsetter at prinsipalkomponentene i rentenes terminstruktur også kan sies å reversere til et historisk gjennomsnitt. Vedlegget til artikkelen viser at betingelsene for dette holder.

langsiktige rentenivået det samme for hele estimeringsperioden, noe som kan være en svakhet ved modellen.

Rentenivået har vært i en fallende trend i perioden fra 1980-tallet til 2010-tallet. Årsaken til dette kan være sammensatte.¹² Om terminpremiene blir beregnet i en periode med fallende rentenivå, vil ACM-modellen indikere en risikonøytral rente som er for høy, noe som resulterer i en lavere terminpremie enn det som ellers ville vært tilfellet.

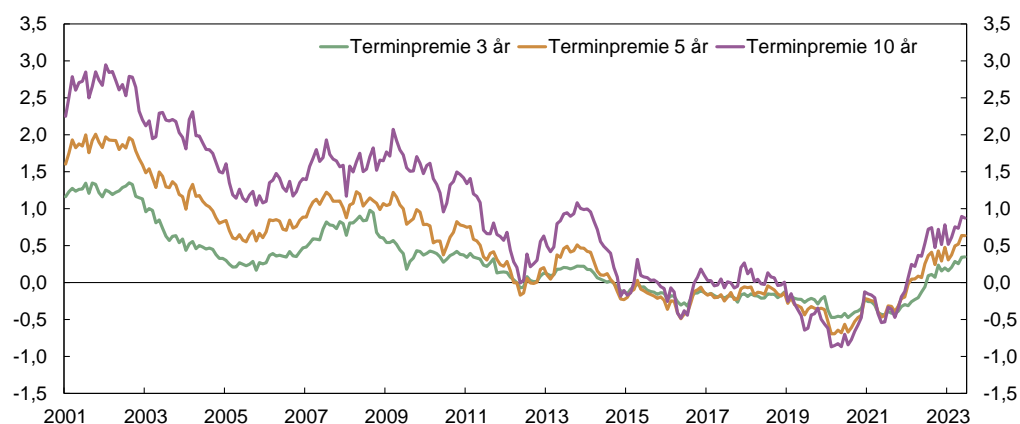
Det motsatte vil være tilfellet om det generelle rentenivået vil stige og stabilisere seg på et høyere nivå. I et slikt tilfelle vil terminpremien bli estimert til å være for høyt fordi den risikonøytrale renten antas å være for lav.

4. Terminpremien i norske statsobligasjoner

Estimeringer ved bruk av ACM-modellen tilsier at terminpremien på norske statsobligasjoner falt betydelig over flere år. Fra perioden 2014 til 2021 var terminpremiene på norske statsobligasjoner, stort sett estimert til å være lave eller negativ. I den siste tiden har terminpremiene økt noe igjen. Det kan skyldes utfasingen av kvantitative lettelsener i flere sentrale land, og usikkerhet knyttet til framtidig utvikling i renter og inflasjon.

Som figur 2 viser, var de estimerte verdiene av terminpremiene ved bruk av ACM-metoden nært null eller negative fra 2014 til 2021. Beregningene viser dessuten at terminpremiene var lavere enn i tilsvarende tyske statsrenter i perioden frem til 2014, se figurene 2 og 4. Fra og med 2022 har terminpremiene på norske statsobligasjoner igjen vært estimert til å være positive.

Figur 2: Terminpremien på norske statsrenter med løpetid på tre, fem og ti år
Prosentenheter. Mars 2001 – august 2023



Kilde: Norges Bank

Figur 3 viser statsrenten, dekomponert i en risikonøytral rente og terminpremie. Den risikonøytrale renten er gjennomsnittlige forventede korte renter over den gitte tidsperioden. Den risikonøytrale renten i ACM-estimeringene har vært noe fallende over tid, men har steget fra februar 2021.

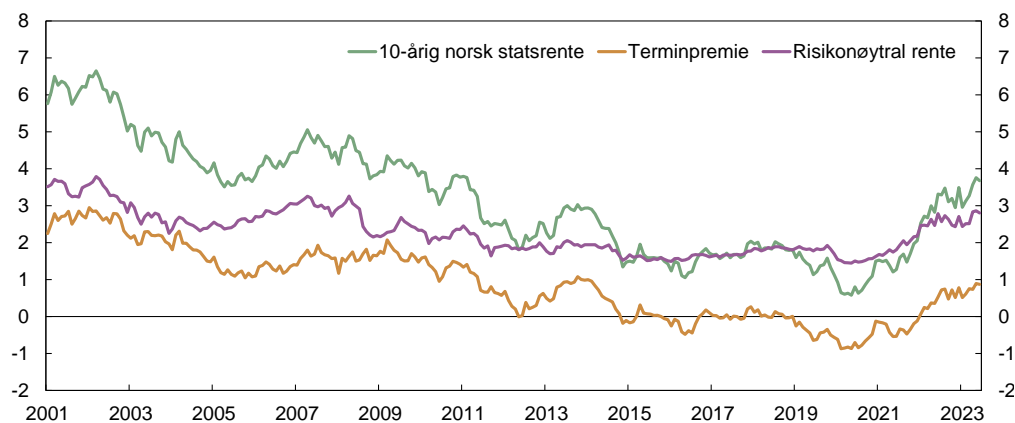
¹² Se Meyer, Ulvedal og Wasberg (2022) for en nærmere gjennomgang.

Renten på den 10-årige statsobligasjonen er ved publisering av dette memoet høyere enn den risikonøytrale renten, noe som i dette rammeverket tilsier at terminpremien er positiv, skjønt på et lavere nivå enn ved første tiår etter årtusenskiftet.

Mellom 2009 og 2019 falt den norske 10-års statsobligasjonsrenten med om lag 200 basispunkter. Modellen indikerer at nærmere 80 prosent av fallet kan forklares med en nedgang i terminpremien.

Figur 3: Estimerte terminpremier og nøytrale renter

Prosentenheter. Mars 2001 – august 2023



Kilde: Norges Bank

I en lengre periode etter finanskrisen kjøpte flere av de ledende sentralbankene statsobligasjoner og andre verdipapirer i markedet for å gjøre pengepolitikken mer ekspansiv. Dette tiltaket er kjent som kvantitative lettelser.¹³ Valget om å kjøpe verdipapirer kan også tolkes som et signal om at rentene ville bli holdt lave i en lang periode, noe som isolert sett i seg selv kan redusere terminpremien.

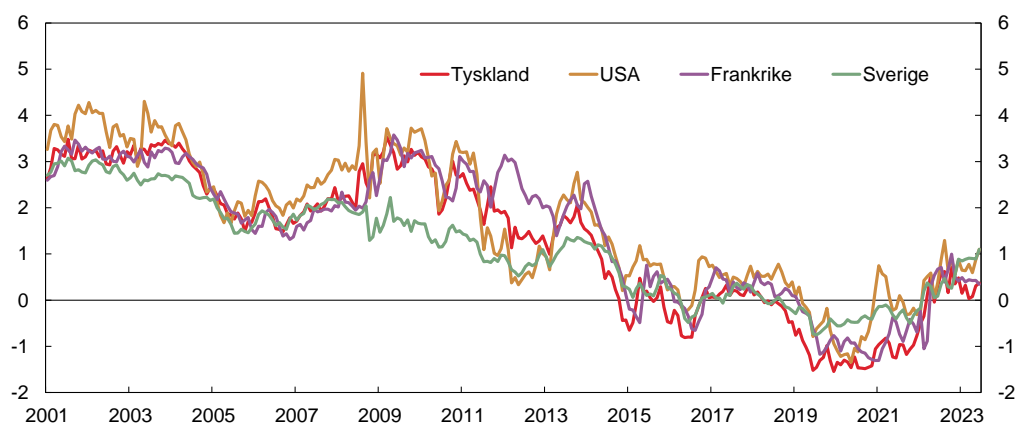
Litteraturen om kvantitative lettelser fra andre land gir ikke et entydig svar om effekten av tiltaket har vært størst fordi det har gitt et fall i forventede styringsrenter eller gjennom fall i terminpremien, som presisert i Olsen (2019). Gjennom blant annet porteføljeeffekter og smitteeffekter fra andre rentemarkeder, har sentralbankenes politikk trolig bidratt til lavere renter på norske statsobligasjoner. Siden 2022 har flere sentralbanker trappet ned eller avsluttet sine aktivakjøp.

Figur 4 viser utviklingen i terminpremier på noen utvalgte lands 10-årige statsrenter. Det er til en viss grad en variasjon i nivået på premien, men utviklingen over tid tyder på å være nokså sammenfallende.

¹³ I tilfeller der styringsrenten er på et allerede lavt nivå, kan slike kvantitative lettelser bidra til å senke rentene i økonomien ytterligere for å øke den økonomiske aktiviteten. Sentralbankenes kjøp av verdipapirer, i hovedsak statsobligasjoner, presser prisen på obligasjonene opp og rentene ned. Eiere av statsobligasjoner og andre aktiva får høyere formue som følge av økt verdier. Husholdninger og bedrifter med lån vil få lavere renteutgifter. Når sentralbankene kjøper store mengder av statsobligasjoner, blir tilgjengelig volum i markedet mindre. Investorer vil typisk kjøpe andre aktiva med høyere risiko eller statsobligasjoner med høy kredittverdighet i andre land, som for eksempel Norge.

Figur 4: Estimerte terminpremier i 10-års statsrenter for et utvalg land

Prosentenheter. Mars 2003 – august 2023



Kilde: Norges Bank

5. Robusthetsanalyse av terminpremieberegningene

Terminpremier kan ikke observeres direkte, og estimeringene av terminpremier vil alltid være usikre. Statsgjeldsforvaltningen gjør derfor flere robusthetsanalyser for å vurdere estimatene fra ACM-modellen.

5.1 Skjevhetsskorrigert terminpremieberegning

En utfordring ved terminpremieestimeringer er at renter har en høy grad av persistens, og at dette ikke fanges opp tilstrekkelig av parameterne dersom estimeringsperioden er kort, se Bauer et. al (2012). Dette gir en estimeringsskjevhet i parameterne, og medfører at faktorene returnerer til sitt historiske gjennomsnitt for raskt.

Vi benytter derfor en metode beskrevet i Jennison (2017) for å korrigere dette. Metoden innebærer at vi reestimerer VAR-modellen en rekke ganger med tilfeldig valgte underperioder.¹⁴ Basert på alle estimeringene beregner vi gjennomsnittet av parameterne $\bar{\Phi}$. Til slutt beregnes en skjevhetsskorrigert matrise med parameterne:

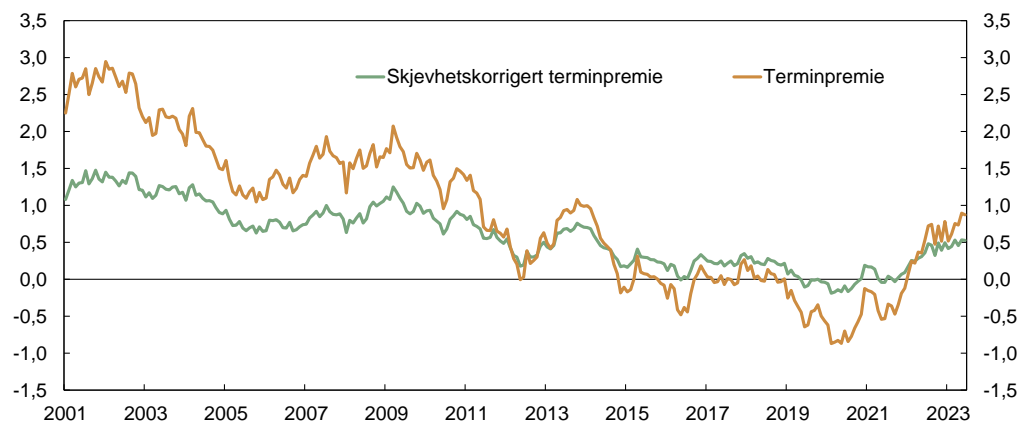
$$(5.1.) \quad \hat{\Phi}^{BC} = 2\hat{\Phi} - \bar{\Phi}$$

Til slutt beregnes terminpremiene med $\hat{\Phi}^{BC}$ som utgangspunkt. Figur 5 viser de skjevhetsskorrigerte terminpremiene sammenlignet med terminpremier beregnet med standardmetoden. I likhet med Jennison (2017) og Malik og Meldrum (2014) ser vi at skjevhetsskorrigeringen reduserer variasjonen i terminpremiene. Korrigeringen gjør at terminpremieestimeringene i begynnelsen av estimeringsperioden blir lavere, samtidig som terminpremier blir høyere i perioden etter 2014. Dette skyldes at terminpremier beregnes ved å bruke et gjennomsnitt av de reestimerte terminpremiene. Det medfører at variasjonene i terminpremier blir mindre.

¹⁴ Vi har valgt å reestimere 10 000 ganger.

Når parameterne estimeres på grunnlag av ulike underperioder får vi et stort antall parametersett som vi kan bruke for å estimere terminpremien over den fulle perioden. Terminpremiene som er gitt av beregninger basert på underperiodene kan da sammenlignes med beregningen basert på den fulle perioden.

Figur 5: Skjevhetsskorrigerte terminpremier
Prosentenheter. 2001 – august 2023



Kilde: Norges Bank

5.2 Estimeringsusikkerhet i terminpremieberegningene

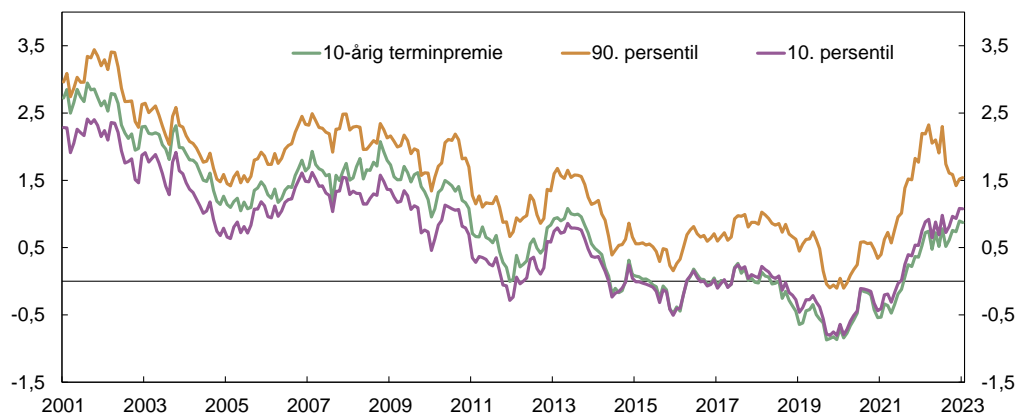
Vi ser videre på en metode som forsøker å anslå et utfallsrom for terminpremieberegninger gjort i dag sammenlignet med beregninger gjort på andre datagrunnlag. Alle parameterne i modellen reestimeres n antall ganger for tilfeldig valgte underperioder av den fulle observasjonsperioden.¹⁵ Deretter beregnes terminpremiene for alle underperiodene. Resultatene av estimeringene samles i ett datasett som dekker hele perioden 2001-2023. Den 10. og 90. persentil av beregningene er vist i figur 6, sammen med estimeringene for hele perioden.

Hver estimering av modellen basert på en underperiode gir et unikt sett av koeffisienter. Når disse koeffisientene brukes til å beregne terminpremieanslag for hele perioden får vi et datasett med et stort antall terminpremieanslag for ett hvert tidspunkt i hele perioden. 10 prosent av estimeringene er lavere enn grafen for 10.persentil som vist i figur 6 på ett hvert tidspunkt. Tilsvarende er 10 prosent av verdiene høyere enn 90. persentil. I figuren sammenlignes dette med terminpremieberegningen basert på hele perioden.

¹⁵ Her settes n til 10 000.

Figur 6: Usikkerhetsintervaller for de estimerte terminpremiene

Prosentenheter. August 2001 – august 2023



Kilde: Norges Bank

Estimeringen for den 10-årige terminpremien ligger nærme 10. persentil i en lengre periode. Det indikerer at modellen gir et konservativt estimat på terminpremien når hele perioden benyttes. At terminpremien estimert over hele perioden ligger lavt i eller under nedre del av intervallet, henger trolig sammen med utviklingen i rentenivået. De fleste av underperiodene som dekker de siste observasjonene i det samlede datasettet vil ha et lavere rentenivå. Dermed vil estimeringene for disse underperiodene kunne resultere i et lavere nivå på den anslåtte risikonøytrale renten, slik at terminpremien blir høyere.

6. Oppsummering

Statsgjeldsforvaltningen i Norges Bank estimerer terminpremiene på norske statsobligasjoner ved hjelp av metoden som er utviklet av Adrian, Crump og Moench (2013). Positive terminpremier utgjør isolert sett en kostnad ved å låne langsiktig fremfor kortsiktig.

Modellens estimat på terminpremien i lange statsobligasjoner falt betydelig over flere år og har vært lav de siste årene. Det indikerer at merkostnaden ved å låne langsiktig har vært relativt lav. Den siste perioden har terminpremiene på norske statsobligasjoner økt noe igjen.

Nivået på terminpremiene bør tolkes med varsomhet. Valg knyttet til modellen og datagrunnlag påvirker i stor grad det estimerte nivået på terminpremiene. Modellene kan imidlertid gi gode indikasjoner på utviklingen i terminpremiene.

- Adrian, T., Crump, R. K., og Moench, E. (2013). Pricing the term structure with linear regressions. *Journal of Financial Economics*, 110(1), 110-138.
- Ang, A. og Piazzesi, M. (2003). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. *Journal of Monetary Economics*, vol 50, no 4, pp 745-87.
- Bauer, M. D. & Rudebusch, G. D. (2016). Monetary policy expectations at the zero lower bound. *Journal of Money, Credit and Banking* 48(7), 1439-1465
- Bauer, M. D., Rudebusch, G. D. & Wu, J. C. (2012). Correcting estimation bias in dynamic term structure models. *Journal of Business & Economic Statistics* 30(3), 454- 467.
- Bernhardsen, T., 2011. Renteanalysen. *Norges Bank Staff Memo*.
- Callaghan, M. (2019). Expectations and the term premium in New Zealand long-term interest rates. *Analytical Notes 2019/2*, Reserve Bank of New Zealand
- Ceballos, L. og Romero, D. (2016). Decomposing Long-Term Interest Rates: An International Comparison. *The Journal of Fixed Income*. 26 (1) 61-73.
- Cohen, B.H., Hordahl, P. og Xia, D. (2018). Term premia: models and some stylised facts. *BIS Quarterly Review*.
- De Lange, E.P., Rissstad, M. og Westgaard, S. (2022). Term Premia in Norwegian Government Bond Yields. Beta. *Scandinavian Journal of Business Research*.
- De Lange, E.P., Rissstad, M. og Westgaard, S., (2023). Term Premia in Norwegian Interest Rates Swaps. *Journal of Risk and Financial Management*, volum 16 (3).
- Eser, F., Lemke, W., Nyholm, K., Radde, S., Vladu, A.L. (2019). Tracing the impact of the ECBs asset purchase programme on the yield curve. *ECB Working Paper*, No 2293.
- Federal Reserve Bank of New York. (2023). *Treasury Term Premia*.
https://www.newyorkfed.org/research/data_indicators/term-premia-tabs#/overview
- Fisher, Irving (1930). *The Theory of Interest*, Pickering & Chatto, London.
- Hördahl, P., Tristani, O. og Vestin, A. (2006). A joint econometric model of macroeconomic and term structure dynamics. *Journal of Econometrics*, vol 131, no 1/2, pp 405-44.
- Jennison, F., (2017). Estimation of the term premium within Australian Treasury Bonds. Working Paper, Australian Office of Financial Management.
- Joslin, S., Singleton, K. J. & Zhu, H. (2011). A new perspective on Gaussian dynamic term structure models. *The Review of Financial Studies* 24(3), 926-970.
- Kim, D. og Wright, J. (2005). An arbitrage-free three-factor term structure model and the recent behavior of long-term yields and distant-horizon forward rates. *Finance and Economics Discussion Series*, Board of Governors of the Federal Reserve System, no 2005-33, August
- Lutz, F. (1940). The Structure of Interest Rates. *Quarterly Journal of Economics*. 55, 36-63
- Kopp, E. og Williams, P.D. (2018). A Macroeconomic Approach to the Term Premium. *IMF Working Papers*.
- McCoy, E. (2019). A Calibration of the Term Premia to the Euro Area. *Discussion Paper 110*. European Commission
- Meldrum, A. og Malik, S., (2014). Evaluating the Robustness of UK Term Structure Decomposition Using Linear Regression Methods. Working Paper No. 518, Bank of England

Meyer, S.S., Ulvedal, P.B. og Wasberg, E.S. (2022). Den nøytrale realrenten: Et oppdatert syn på r^* . *Norges Bank Staff Memo*.

Moe, O.D. og Michelsen, M-P. L. (2021). Prediksjon av terminpremien på norske statsobligasjoner. *Masteroppgave*. Norges handelshøyskole.

Norges Bank (2022) Håndbok i pengepolitikk. *Norges Bank Memo*.

Norges Bank (2023) *Nærmere om Norges Banks metode for beregning av nullkupongrenter*. <https://www.norges-bank.no/tema/Statistikk/statsrenter/statsrenter/>

Olsen, Ø. The monetary policy toolkit 2019. *Speech at Centre for Monetary Economics*.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Volume 5, issue 2. 177-188

Wright, J. H. (2014), Term premia and inflation uncertainty: Empirical evidence from an international panel dataset: Reply. *American Economic Review* 104(1), 338-41

ACM-modellen

Terminpremien her er altså premien en statsobligasjon med lengre løpetid gir utover forventet kortsiktig rente. Modellen tar sikte på å estimere forventet avkastning, en konveksitetsjustering og en komponent som gir selve terminpremien.

ACM-modellen tar utgangspunkt i at kursen på en obligasjon drives av et sett av uobserverbare faktorer. Disse er bygd opp av prinsipalkomponenter.¹⁶ Det forutsettes at prinsipalkomponentene over tid utvikler seg i henhold til prosessen (3.1), en VAR-modell, der sjokkene v_{t+1} er normalfordelte med en forventet verdi lik 0 og en varians-kovariansmatrise Σ .

$$(1) \quad X_{t+1} = \mu + \phi X_t + v_{t+1}.$$

Kursen på en n -perioders obligasjon på tidspunkt t , det vil si P_t^n , defineres rekursivt som det forventede produktet av en stokastisk diskonteringsfaktor på tidspunkt $t + 1$, altså k_{t+1} , og kursen på den samme obligasjonen etter én periode i $t + 1$, som vist i (2).

$$(2) \quad P_t^n = E_t[k_{t+1}P_{t+1}^{n-1}].$$

Den stokastiske diskonteringsfaktoren k_{t+1} omfatter all relevant informasjon om prissettingen og benyttes langs alle løpetider. Forskjellene i rentene bestemmes av investorenes oppfatning av risiko, i tillegg til forventede endringer i den stokastiske diskonteringsfaktoren. For å kunne sammenligne rentene best mulig brukes nullkupongrenter.¹⁷

Den stokastiske diskonteringsfaktoren er en funksjon av den risikofrie renten r_t og markedsprisingen av risiko λ_t på tidspunkt t , som vist i (3).

$$(3) \quad k_{t+1} = \exp\left(-r_t - \frac{1}{2}\lambda' \lambda_t - \lambda' \Sigma^{-1/2} v_{t+1}\right).$$

Den risikofrie renten $r_t = \ln P_t^1$ er renten med en løpetid på den korteste tidsenheten. For estimeringene utført av Norges Bank, er dette én måned.

ACM-modellen legger til grunn at markedsprisingen av risiko λ_t er lineært avhengig av de uobserverbare faktorene, som vist i (4), der λ_0 er den tidsinvariante komponenten av markedsprisingen av risiko, og λ_1 er komponenten som varierer over tid.

$$(4) \quad \lambda_t = \Sigma^{-1/2}(\lambda_0 + \lambda_1' X_t),$$

Logaritmen til meravkastningen ved å holde en obligasjon med forfall om n perioder fra $t - 1$ til t , ut over risikofri rente, er gitt ved (5).

$$(5) \quad r\lambda_{t+1}^{(n-1)} = \ln P_{t+1}^{(n-1)} - \ln P_t^n - r_t$$

¹⁶ Prinsipalkomponentanalyse er en statistisk metode som benyttes for å redusere et stort antall variabler til et mindre antall faktorer. De nye faktorene er en lineær transformasjon av de opprinnelige variablene, og er konstruert slik at informasjonstapet ved å redusere antall variabler minimeres.

¹⁷ Nullkupongrenter er renter som ikke påvirkes av at obligasjoner kan ha ulike kuponger. Norges Bank beregner disse ved hjelp av en parametrisert metode utviklet av Nelson og Siegel og senere videreutviklet av Svensson, gjerne omtalt som NSS-metoden. Se Norges Bank (2023) for en nærmere utdypning.

Ved å kombinere likningene¹⁸ og anta at $rx_{t+1}^{(n-1)}$ og v_{t+1} er felles normalfordelt, kan meravkastningen ved å holde en obligasjon dekomponeres til ett element som er uavhengig og ett element som er korrelert med v_{t+1} , se ACM (2013) for en fullstendig utledning.

Videre kan meravkastningen til en obligasjon $rx_{t+1}^{(n-1)}$ beskrives som en funksjon av obligasjonens forventede avkastning $\beta^{(n-1)'(\lambda_0 + \lambda_1 X_t)}$, en konveksitetsjustering $\frac{1}{2}(\beta^{(n-1)'}\Sigma\beta^{(n-1)} + \sigma^2)$, en komponent som er korrelert med v_{t+1} , altså $\beta^{(n-1)'}v_{t+1}$, og et ukorrelerte feilledd, som vist i (6).

$$(6) \quad rx_{t+1}^{(n-1)} = \beta^{(n-1)'(\lambda_0 + \lambda_1 X_t)} - \frac{1}{2}(\beta^{(n-1)'}\Sigma\beta^{(n-1)} + \sigma^2) + \beta^{(n-1)'}v_{t+1} + e_{t+1}^{(n-1)}.$$

Likning (6) kan deretter omskrives til (7), der rx er en $N \times T$ matrise med meravkastning, β er en $K \times N$ matrise med koeffisienter, t_T og t_N er $T \times 1$ vektorer med 1, X_- er en $K \times T$ matrise med tidsforsinkede verdier av de uobserverbare faktorene, $B^* = [\text{vec}(\beta^{(1)}\beta^{(1)'}) \dots \text{vec}(\beta^{(N)}\beta^{(N)'})]$ og har størrelsen $N \times K^2$, V er en $K \times T$ matrise med sjokk, og E en $N \times T$ matrise med restledd.

$$(7) \quad rx = \beta'(\lambda_0 t_T' + \lambda_1 X_-) - \frac{1}{2}(B^* \text{vec}(\Sigma) + \sigma^2 t_N) t_T' + \beta'V + E$$

Estimering av ACM-modellen

Statsgjeldsforvaltningen estimerer modellens parametere i tre steg ved bruk av lineære regresjoner, på samme vis som Adrian m.fl. (2013).

I det første steget estimerer vi likning (1) ved minste kvadraters metode (OLS), der de uobserverbare faktorene X_t dekomponeres i en komponent som kan predikeres og et estimat på restleddet u_t . Restleddene settes inn i matrisen \hat{V} , og brukes til å beregne de uobserverbare faktorenes varians-kovariansmatrise $\hat{\Sigma}$.

I det andre steget, som vist i (8), utfører vi regresjoner av meravkastningen på en konstant, de estimerte restleddene \hat{V} , og tidsforsinkede verdier av de uobserverbare faktorene.

$$(8) \quad rx = a t_T' + \beta' \hat{V} + c X_- + E.$$

De uavhengige variablene organiseres i matrisen $\tilde{Z}' = [t_T' \hat{V}' X_-']'$, slik at minste kvadraters estimator gir (9).

$$(9) \quad [\hat{a} \hat{\beta}' \hat{c}] = rx \tilde{Z}' (\tilde{Z} \tilde{Z}')^{-1}.$$

Restleddene fra denne regresjonen brukes til å beregne meravkastningens varians-kovariansmatrise σ^2 . Fra $\hat{\beta}$ konstruerer vi \hat{B}^* . I det tredje steget estimeres risikoparameterne λ_0 og λ_1 . Adrian m.fl. (2013) viser at estimatorene er (10) og (11).

$$(10) \quad \hat{\lambda}_0 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} \left(\hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{B}^* \text{vec}(\hat{\Sigma}) + \sigma^2 t_N) \right), \text{ og}$$

$$(11) \quad \hat{\lambda}_1 = (\hat{\beta} \hat{\beta}')^{-1} \hat{\beta} \hat{c}.$$

¹⁸ Som vist i ACM (2013), så settes (3) og (5) inn i (2).

Ut ifra dette kan vi beregne en modellbasert nullkupongrentekurve basert på de estimerte parameterne. Det er en forutsetning at logaritmen til obligasjonskursen er lineære kombinasjoner av de uobserverbare faktorene, som vist i (12).

$$(12) \quad \ln P_t^n = A_n + B_n' X_t + e_t^n.$$

Gitt likning (5), kan meravkastningen derfor også skrives som

$$(13) \quad r x_{t+1}^{(n-1)} = A_{n-1} + B_{n-1}' X_{t+1} + u_t^{(n-1)} - A_n - B_n' X_t - u_t^n + A_1 + B_1' X_t + u_t^{(1)},$$

hvor

$$(14) \quad -r_t = A_1 + B_1' X_t + u_t^{(1)}.$$

Utrykket for meravkastningen, altså (13), settes sammen med uttrykket for prosessen som danner meravkastningen i likning (6). Da får vi:

$$(15) \quad A_{n-1} + B_{n-1}'(\mu + \phi X_t + v_{t+1}) + u_t^{(n-1)} - A_n - B_n' X_t - u_t^n + A_1 + B_1' X_t + u_t^{(1)} \\ = \beta^{(n-1)' }(\lambda_0 + \lambda_1 X_t + v_{t+1}) - \frac{1}{2}(\beta^{(n-1)' } \Sigma \beta^{(n-1)} + \sigma^2) + e_{t+1}^{(n-1)}$$

For periode $n = 1$ har A og B verdiene $A_1 = -\delta_0$ og $B_1' = -\delta_1'$. Dette danner et rekursivt system av lineære restriksjoner for obligasjonsprisingsparameterne.

$$(16) \quad A_n = A_{n-1} + B_{n-1}'(\mu - \lambda_0) + \frac{1}{2}(B_{n-1}' \Sigma B_{n-1} + \sigma^2) - \delta_0,$$

$$(17) \quad B_n' = B_{n-1}'(\Phi - \lambda_1) - \delta_1',$$

$$(18) \quad A_0 = 0, B_0' = 0,$$

$$(19) \quad \beta^{(n)'} = B_n'$$

$$(20) \quad u_t^{(n-1)} - u_t^n + u_t^{(1)} = e_{t+1}^{(n-1)}$$

Likningene estimeres først som beskrevet over. Det gir modellens prisingsparametere A_n og B_n' . Med utgangspunkt i disse estimatene beregnes nullkupongrentene $-\frac{1}{n}(A_n + B_n' X_t)$. Risikoprisingsparameterne λ_0 og λ_1 settes lik null og likningene estimeres på nytt.

Det danner de risikonøytrale prisingsparameterne A_n^{RN} og $B_n^{RN'}$. De risikonøytrale nullkupongrentene $-\frac{1}{n}(A_n^{RN} + B_n^{RN'} X_t)$ er da å betrakte som et gjennomsnitt av forventede fremtidige korte renter over perioden.

Terminpremien regnes ut som differansen mellom den aktuelle nullkupongrenten og de risikonøytrale nullkupongrentene, altså:

$$(21) \quad TP_t^n = -\frac{1}{n}(A_n + B_n' X_t) - \left(-\frac{1}{n}(A_n^{RN} + B_n^{RN'} X_t) \right)$$

Stabiliteten til prinsipalkomponentene

En viktig forutsetning i ACM-modellen er at prinsipalkomponentene til rentenes terminstruktur reverserer til et historisk gjennomsnitt over tid. Evolusjonen av faktorene er modellert i henhold til 3.1. For at faktorene skal reverseres over tid må dette systemet være stabilt.

Stabilitetsbetingelsen for 3.1 er at alle fem egenverdier til matrisen ϕ er innenfor enhets sirkelen. Alternativt kan en si at alle egenverdier må ha modulus mindre enn 1. I vår estimering får vi følgende egenverdier for ϕ , se tabell 1.

Tabell 1: Egenverdier

Eigenverdi	Kompleks verdi	Modulus
γ_1	0.6496+0.0i	0.6496
γ_2	0.9771+0.0i	0.9771
γ_3	0.9085+0.0798i	0.9120
γ_4	0.9085-0.0798i	0.9120
γ_5	0.92164+0.0i	0.9216

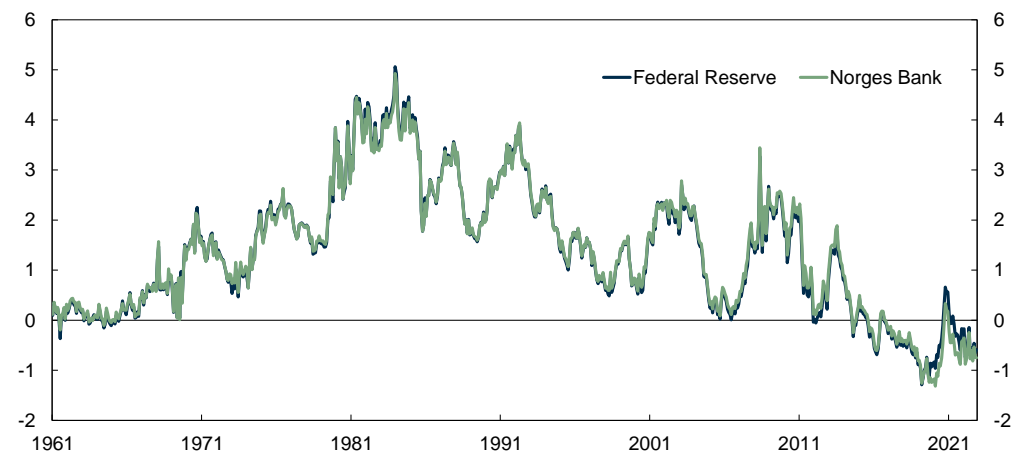
Rekonstruksjon av 10-årig terminpremie for USA

Den amerikanske sentralbanken Federal Reserve offentliggjør både nullkupongrenter og terminpremier på daglig frekvens¹⁹. Dermed kan vi foreta en kryssjekk for å sikre at våre resultater harmonerer med Federal Reserves beregninger.

Vi konverterer Federal Reserves nullkupongrenter til månedlig frekvens og deretter beregner vi terminpremier for 10 års løpetid. Figur A viser den beregnede tiårige terminpremien på amerikanske renter og vår egen beregning. Det er forventet noe forskjell mellom kurvene, ettersom Norges Banks beregning bruker månedlig frekvens og Federal Reserve bruker daglig frekvens. Figuren viser at det hovedsakelig kun er marginale forskjeller mellom metodene.

Figur A: Kryssjekk

Prosentenheter. Juni 1961 – april 2022



Kilde: Norges Bank

¹⁹ Se Federal Reserve (2023a) og Federal Reserve (2023b).

Valg av antall faktorer

Terminpremieanalysen tar utgangspunkt i at et rentekurven kan representeres ved et antall faktorer som estimeres med prinsipalkomponent analyse (PCA).

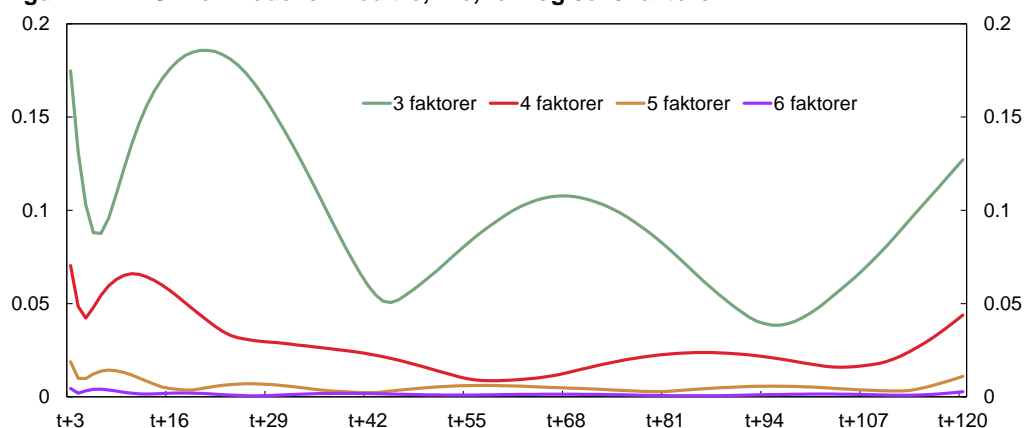
Denne typen analyser bruker ofte tre faktorer. Hver faktor vil da kunne tolkes som nivå, helning og kurvatur.

Faktorenes tolkning er ikke like åpenbar hvis antallet øker utover tre. Likevel kan det være hensiktsmessig hvis modellens forklaringskraft øker. Flere faktorer vil imidlertid øke risikoen for overtilpasning av modellen.

Adrian m.fl. (2008) konkluderer med at fem faktorer er passer deres data best. Bank of England (2014) bruker fire faktorer. Jennison (2017) anvender også fem faktorer for australske rentedata. Callaghan (2019) bruker tre faktorer for New Zealandske renter.

Figuren under viser «Root mean square error» (RMSE) ved bruk av tre, fire, fem og seks faktorer for hver løpetid som inngår i beregningen. Den måler kvadrerte avvik mellom faktiske og estimerte rentekurver. Høyere tallverdi viser at den estimerte kurven i mindre grad treffer den faktiske.

Figur B1: RMSE for modeller med tre, fire, fem og seks faktorer

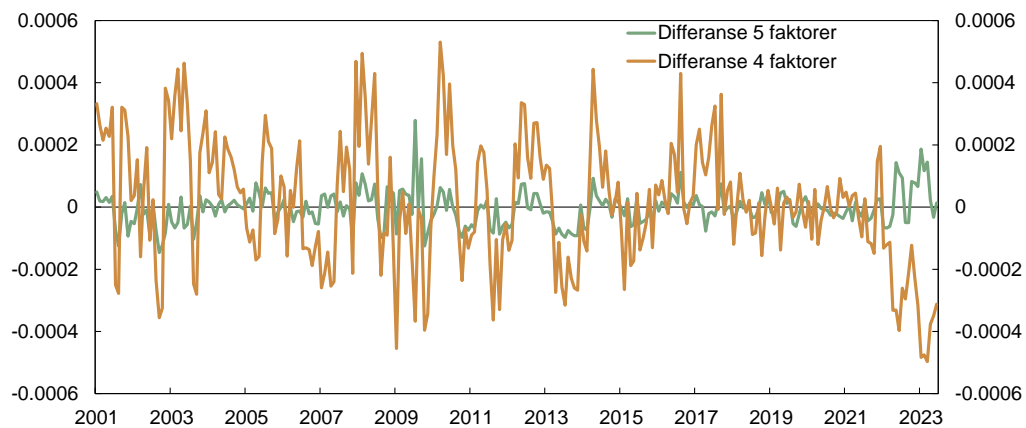


Kilde: Norges Bank

Figur B viser at modellen som bruker tre faktorer treffer dårligere på de faktiske rentene enn de tre øvrige. Det er imidlertid lite som skiller modellene som bruker tre faktorer eller mer. Etter en samlet vurdering, bruker vi fem faktorer i estimeringene våre.

Figur C og Figur D viser forskjellen mellom faktiske og estimerte renter, generert av en modell med fire og fem faktorer for henholdsvis tre måneder og ti års løpetid. Figurene viser at modellen med fem faktorer gir bedre anslag i to perioder. Disse er i etterkant av finanskrisen og den nylige perioden med renteoppgang.

Figur B2: Forskjellen mellom faktiske og estimerte renter ved bruk av fire og fem faktorer
Tiårs løpetid.



Kilde: Norges Bank