

ANO 2002/3

Oslo
22. februar 2002

Working Paper

Avdeling for verdipapirer og internasjonal finans

Estimering av indikatorer for volatilitet

av

Kjetil Johan Rakkestad

Working papers fra Norges Bank kan bestilles over e-post:
posten@norges-bank.no
eller ved henvendelse til:
Norges Bank, Abonnementservice
Postboks 1179 Sentrum
0107 Oslo
Telefon 22 31 63 83, Telefaks 22 41 31 05

Fra 1999 og senere er publikasjonene tilgjengelige som pdf-filer
på www.norges-bank.no, under "Publisert".

Working papers inneholder forskningsarbeider
og utredninger som vanligvis
ikke har fått sin endelige form.
Hensikten er blant annet at forfatteren
kan motta kommentarer fra kolleger
og andre interesserte.

Synspunkter og konklusjoner i arbeidene
står for forfatternes regning.

*Working papers from Norges Bank can be ordered by e-mail:
posten@norges-bank.no
or from Norges Bank, Subscription service,
P.O.Box. 1179 Sentrum
N-0107 Oslo, Norway.
Tel. +47 22 31 63 83, Fax. +47 22 41 31 05*

*Working papers from 1999 onwards are available as pdf-files on the bank's
web site: www.norges-bank.no, under "Published".*

*Norges Bank's working papers present
research projects and reports
(not usually in their final form)
and are intended inter alia to enable
the author to benefit from the comments
of colleagues and other interested parties.*

*Views and conclusions expressed in working papers are
the responsibility of the authors alone.*

ISSN 0801-2504
ISBN 82-7553-191-8

ESTIMERING AV INDIKATORER FOR VOLATILITET

Ketil Johan Rakkestad¹

Avdeling for Verdipapirer og internasjonal finans
Norges Bank

22. Februar 2002

Sammendrag

Notatet omhandler ulike metoder for estimering av volatilitetsindikatorer for finansielle aktiva. Det gis en presentasjon av de enkleste statistiske volatilitetsindikatorerne basert på avkastningsserier for finansielle priser, samt metoder for vektning av data og skalering av indikatorer. Mer avanserte metoder og modeller, som ARCH og GARCH, omtales, men utdypes ikke. Videre gjennomgås implisitte volatilitetsindikatorer basert på opsjonspriser. I tillegg til Black-Scholes implisitt volatilitet, gis en presentasjon av ulike metoder for estimering av risikonøytrale sannsynlighetsfordelinger.

Stikkord: Volatilitet, implisitt volatilitet, opsjonspriser, implisitte sannsynlighetsfordelinger.

JEL klassifisering: C10, G13

¹ Takk til Knut Eeg, Arild Lund, Gabriela Mundaca, Johannes A. Skjeltorp, Bjørne Syversten, Bent Vale og Sindre Weme for verdifulle innspill og kommentarer.

<u>INNLEDNING</u>	3
<u>1 STATISTISKE VOLATILITETSINDIKATORER</u>	3
<u>1.1 Historisk varians og standardavvik</u>	4
<u>1.2 Vekting av observasjonene</u>	5
<u>1.3 Skalering</u>	9
<u>1.4 GARCH -modeller</u>	11
<u>1.4.1 ARCH</u>	12
<u>1.4.2 GARCH(p,q)</u>	13
<u>2 IMPLISITTE VOLATILITETSINDIKATORER</u>	14
<u>2.1 Om derivater – innledende teori</u>	14
<u>2.2 Terminkontrakter: Forward og futureskontrakter</u>	14
<u>2.3 Opsjoner</u>	15
<u>2.4 Arbitrasjepricing</u>	15
<u>2.4.1 Pricing av forward og futureskontrakter</u>	16
<u>2.4.2 Pricing av opsjoner</u>	17
<u>2.5 Black-Scholes modellen</u>	17
<u>2.5.1 Varianter av Black-Scholes formel</u>	22
<u>2.6 Black-Scholes implisitt volatilitet</u>	23
<u>2.6.1 Implisitt volatilitet som indikator</u>	25
<u>3 IMPLISITTE SANNSYNLIGHETSFORDELINGER</u>	25
<u>3.1 Volatilitetssmilet og Black-Scholes</u>	27
<u>3.2 Estimeringsteknikker</u>	27
<u>3.3 En diskret metode: Risikonøytrale histogrammer</u>	28
<u>3.4 Direkte interpolering av callprisfunksjonen</u>	29
<u>3.5 Interpolering av volatilitetssmilkurven (Shimko 1993 m.fl.)</u>	29
<u>3.6 Estimering av opsjonens underliggende prosess</u>	29
<u>3.7 Parametrisk tilnærming av den implisitte tetthetsfunksjonen</u>	30
<u>4 OPPSUMMERING</u>	32
<u>5 LITTERATUR</u>	32

INNLEDNING

Indikatorer for volatilitet i finansielle markeder er av interesse for Norges Bank gjennom sentralbankens arbeid med både monetær og finansiell stabilitet. I dag produseres det slike indikatorer basert på ulike finansielle aktiva i flere avdelinger i banken. Det produseres både statistiske og implisitte volatilitetsindikatorer for valutakurser, renter, oljepris og egenkapitalinstrumenter. De implisitte volatilitetsindikatorer er i motsetning til de statistiske indikatorer basert på derivatpriser og ikke på prisdata fra primærmarkedene. Indikatorer for implisitt volatilitet gjenspeiler markedsaktørenes syn på fremtidig usikkerhet og er således mer fremadskuende enn de statistiske indikatorer. I den senere tid er det også tatt i bruk metoder for å estimere implisitte sannsynlighetsfordelinger basert på opsjonspriser. Disse kan anvendes til å estimere markedets oppfatning av retningen på de implisitte volatilitetsindikatorer.

Formålet med dette notatet er å gi en samlet fremstilling av de mest brukte volatilitetsindikatorer og hovedtrekkene i det metodiske grunnlaget for disse. Innholdet er i stor grad basert på Alexander (1998), Bahra (1997) og Rockinger (2001). Notatet er organisert slik at vi i kapittel 1 omhandler teori og anvendelser av statistiske volatilitetsindikatorer. Kapittel 2 omhandler implisitte volatilitetsindikatorer. Kapitlet gir også en kort gjennomgang av teorien for derivater og derivatprising. Kapittel 3 beskriver ulike metoder for å estimere implisitte sannsynlighetsfordelinger basert på opsjonspriser. I kapittel 4 gis en kort oppsummering.

1 STATISTISKE VOLATILITETSINDIKATORER

Volatilitet kan defineres på ulike måter. Vanligvis omtaler man volatilitet som en parameter for størrelsen på fluktuasjonene i en serie av finansielle data. For å kunne operere med en presis definisjon av begrepet, er man derfor nødt til å bestemme hvilken metode man ønsker å benytte for å måle disse fluktuasjonene. Valget av metode vil blant annet være avgjørende for hvilken størrelsesorden og måleenhet volatilitetsparameteren har. Hvilken metode det er mest hensiktsmessig å benytte, er avhengig av i hvilken sammenheng man skal anvende parameteren. Det viktige er at man i omtale og bruk av en parameter er klar på hvilken variant av begrepet man refererer til og benytter.

Det er også mulig å gi en ikke-parametrisk definisjon av begrepet. En vanlig ikke-parametrisk definisjon av volatilitet er at den stokastiske variabelen x er mer "volatil" enn den stokastiske variabelen y dersom

$$P(|x| > c) > P(|y| > c) \text{ for alle verdier av en konstant } c,$$

der $P(z)$ angir sannsynligheten for et utfall z . Denne definisjonen er lite anvendelig i praksis, og det er derfor vanligst å operere med en parametrisk definisjon. Det kan vises at definisjonen ovenfor er ekvivalent med at $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$, det vil si at variabelen x har større varians enn variabelen y , hvis x og y har symmetriske sannsynlighetsfordelinger. Den vanligste måten å definere volatilitet er ved variansen σ^2 eller standardavviket σ til de variablene man betrakter. I dette notatet vil variablene representere tidsserier av finansielle data, slik at parameteren σ angir størrelsen på fluktuasjonene i tidsseriene.

1.1 Historisk varians og standardavvik

Anta at vi betrakter en serie r_t av finansielle data. Serien kan for eksempel representere de daglige avkastningstallene for en aksje. Vi er interessert i et uttrykk for volatiliteten ved tidspunktet T for de foregående n dagene. En enkel metode for å finne en parameter for volatiliteten i aksjeavkastningen i denne perioden er å beregne den *historiske variansen* eller det *historiske standardavviket* for serien i denne perioden. Hvis den gjennomsnittlige avkastningen i perioden er \bar{r} , finner vi variansen over de siste n dagene gitt ved

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum_{t=T-n}^{t=T-1} (r_t - \bar{r})^2}{n}.$$

Standardavviket for avkastningstallene for de siste n dagene blir dermed $\sigma_T = \sqrt{\sigma_T^2}$. Av formelen ovenfor ser vi at måleenheten for variansen er lik kvadratet av måleenheten til avkastningstallene. Standardavviket får dermed samme måleenhet som avkastningen. Hvis avkastningen for eksempel måles i prosent, oppgis derfor også σ_T i prosent.

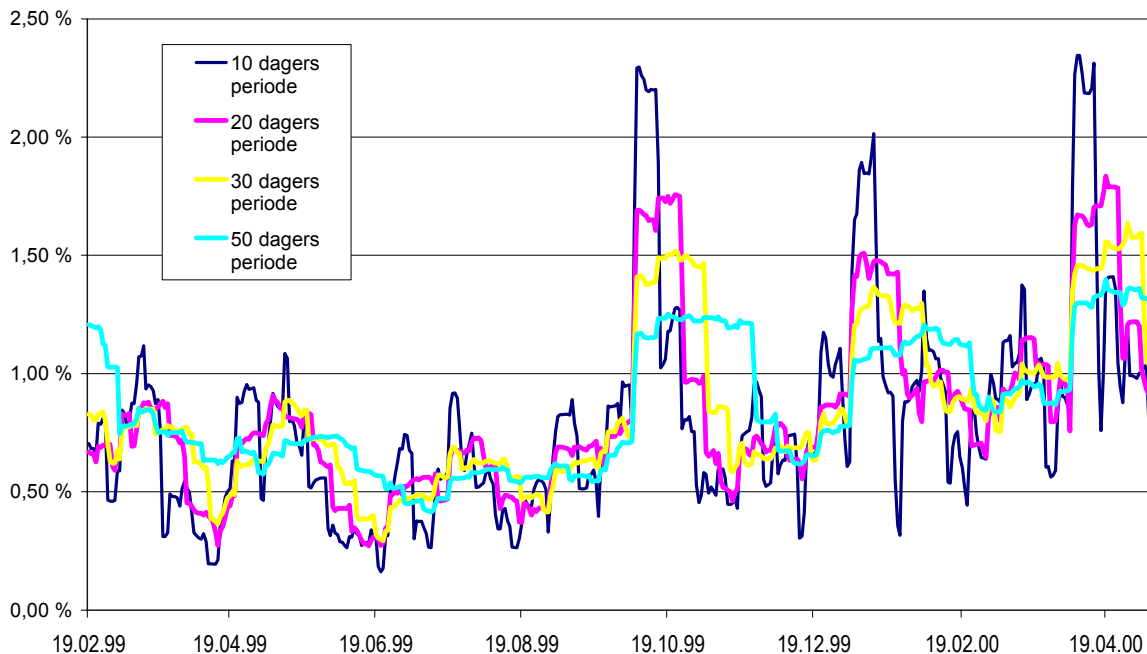
Beregning av såkalt *n-periodisk historisk volatilitet* σ_T eller σ_T^2 , ved hvert tidspunkt T i tidsserien, gir opphav til en tidsserie av volatilitetsestimater. Volatilitetsestimater beregnet som slike ”glidende” standardavvik har tradisjonelt vært benyttet som prognose eller et *forecast* på volatiliteten i en fremtidig periode. Vanligvis benytter man de siste n observasjonene som grunnlag for et estimat over den etterfølgende perioden av lengde n . Dette innebærer at man benytter lange historiske serier for å predikere volatiliteten på lang sikt. Bakgrunnen for dette er at langsiktige volatilitetsprognoser skal være upåvirket av kortvarige ”opphopninger av volatilitet”. Dette er derimot noe man ønsker å ta hensyn til ved kortsiktige volatilitetsprognoser. Ved kortsiktige prognoser har derfor den enkle estimeringsmetoden klare svakheter. Siden alle n observasjonene i den historiske perioden som danner grunnlaget for prognosen, har samme vekt, vil ekstreme verdier påvirke prognosen like mye uavhengig av om de ligger kort eller langt tilbake i tid. For eksempel vil en enkelt dag med ekstremt høy avkastning for en aksje øke de neste n volatilitetsprognosene for aksjen, selv om markedet er rolig både før og etter denne dagen. Ved bruk av denne metoden vil derfor de kortsiktige prognosene gjennomgående være kunstig høye i rolige perioder og for lave i perioder rett etter en periode med høy volatilitet.

Et annet vesentlig aspekt ved estimering på bakgrunn av likt vektete historiske observasjoner, er at man estimerer en *konstant* parameter. Tidsserien som betraktes varierer over tid, men parameteren som estimeres er den konstante ubetingede variansen til observasjonene i tidsserien. Kvaliteten og presisjonen på estimatet vil avhenge av lengden på den historiske tidsserien man benytter, men man estimerer uansett den samme underliggende parameteren. Innenfor denne modellen har man altså kun en mulighet for å påvirke resultatet – å variere antallet observasjoner som benyttes ved estimeringen. Et lite antall observasjoner vil gi store variasjoner i estimatene ved ulike tidspunkter og omvendt. Variasjonen i volatilitetsestimaterne kan dermed utelukkende betraktes som et resultat av utvalgsfeil. Ved bruk av denne metoden vil resultatet være upåvirket av en eventuell omstokking i rekkefølgen av observasjonene som benyttes, og tar dermed ikke hensyn til dynamiske egenskaper ved tidsserien.

Eksempel 1.1 Historisk volatilitet for Totalindeksen ved Oslo Børs.

Figur 1.1 viser n -dagers historisk volatilitet for daglige avkastningstall for totalindeksen ved Oslo Børs i perioden 18. februar 1999 til 8. mai 2000 ved ulike verdier av den glidende historiske estimeringsperioden n . Av figuren ser vi at estimatene som er basert på lange

Figur 1.1 Historisk volatilitet, Oslo Børs totalindeks, feb 1999 - mai 2000, dagstall



historiske tidsperioder, gir en glattere kurve. Dette er naturlig siden vi inkluderer et større antall observasjoner ved hver beregning. Dermed vil estimatene være mindre påvirket av store fluktasjoner innenfor den tidsperioden hvert estimat er basert på. Følgelig vil de ulike kurvenes topp- og bunnpunkter være forskjøvet i forhold til hverandre. Ved å estimere på bakgrunn av en kort tidsperiode ser vi at volatilitetsestimatene reagerer raskere på fluktasjoner i den underliggende tidsserien.

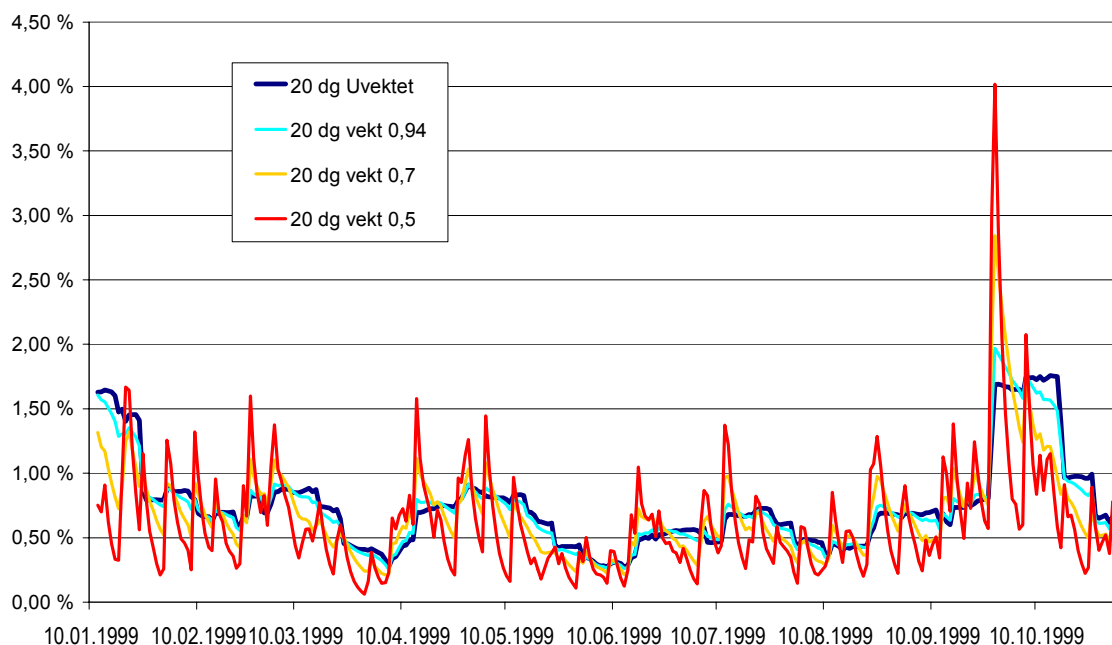
1.2 Vekting av observasjonene

Metoden som er beskrevet ovenfor tilordner hver observasjon i utvalget samme vekt uansett hvor i utvalget observasjonen er plassert. En slik metode innebærer for eksempel at et avkastningstall for en aksje vil påvirke den estimerte volatilitetsparameteren like mye uavhengig om det er n dager gammelt, eller om det er avkastningstallet for foregående dag. For å fange opp dynamikken i tidsserien bedre, kan man tilordne observasjonene *ulike* vekter. En vanlig metode er å benytte såkalt *eksponentiell vekting*. Eksponentiell vekting gjøres ved at observasjonene gis vekter som avtar eksponentielt med avstanden i tid fra estimeringstidspunktet. Hvis vi for eksempel skal estimere volatiliteten på bakgrunn av en tidsserie med lengde n , og tilordner den ”nyeste” observasjonen en vekt $0 < \lambda < 1$, gis de foregående observasjonene eksponentielt avtakende vekter λ^2 , λ^3 , λ^4 λ^n . Den første observasjonen i utvalget får dermed minst vekt. Hvis vi betrakter en tidsserie x , kan en slik estimator uttrykkes ved

$$\frac{x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \lambda^{n-1} x_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i x_{t-i-1}, \quad (1.1)$$

der $0 < \lambda < 1$. Ved å benytte eksponentielt vektete glidende gjennomsnitt (EWMA²) gis altså de siste observasjonene i tidsserien en høyere vekt enn de første. I eksempelet med avkastningstall for en aksje betyr dette at store endringer i aksjens avkastning i nær fortid har stor påvirkning på den estimerte volatiliteten. Ettersom tiden går vil disse endringene ha mindre og mindre påvirkning på estimatet. Hvor raskt påvirkningen fra de nyeste observasjonene avtar, er avhengig av størrelsen på vektingsparameteren λ . Jo lavere verdi vektingsparameteren λ har, jo raskere avtar påvirkningen. (Se figur 1.2.) Omvendt vil estimering med en høy λ -verdi innebære at observasjoner som ligger langt tilbake i tid får stor innvirkning på estimatet. EWMA metoden for estimering av volatilitet benyttes blant annet i Value at Risk programpakken RiskMetrics™ fra J.P. Morgan, og her anvendes en λ -verdi på 0,94.³

Figur 1.2 Eksponentielt vektete observasjoner. Dagstall



Eksempel 1.2. Sammenligning av vektete og uvektete volatilitetsparametre.

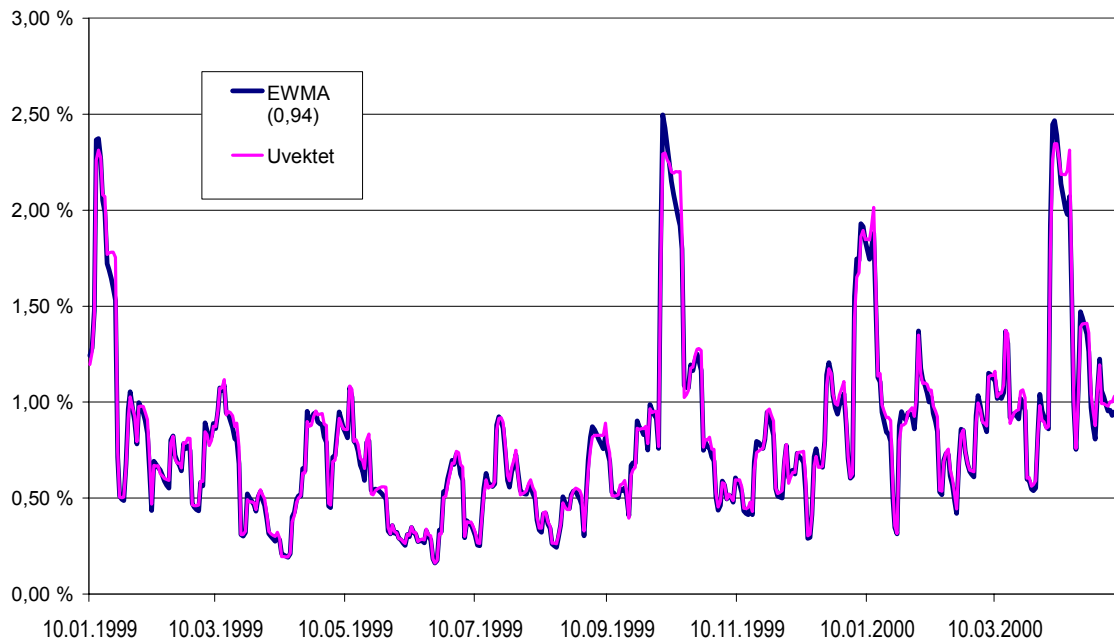
Figur 1.3 viser EWMA med en λ -verdi på 0,94 sammenlignet med en tidsserie av uvektete volatilitetsparametre. Estimeringsperioden er 10 dager. I figur 1.4 er estimeringsperioden utvidet til 20 dager, mens figur 1.5 viser EWMA og uvektete data basert på en estimeringsperiode på 50 dager. Vi ser at forskjellene mellom EWMA og uvektete data er relativt små når estimeringsperioden er kort. I tilfellet med 10 dagers vindu er det knapt synlige forskjeller, mens parameterne avviker noe mer fra hverandre når man benytter 20 dagers historisk vindu. Forskjellene gjør seg gjeldende ved at EWMA parameterne reagerer

² Exponentially Weighted Moving Average.

³ $\lambda = 0,94$ benyttes for VaR beregninger med tidshorisont 10 dager. For VaR estimater med én måneds tidshorisont benytter Riskmetrics™ $\lambda = 0,97$.

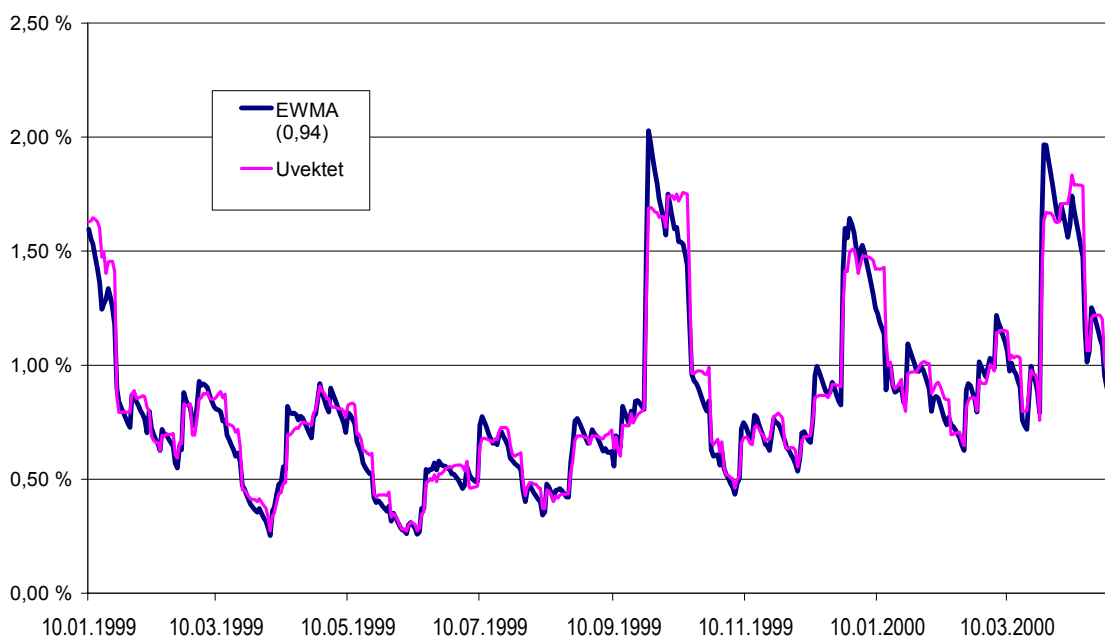
noe raskere på endringer i avkastningstallene. Parametrene som er basert på uvektede data holder seg høye i en lengre periode etter at det har vært store fluktuasjoner i tidsserien for avkastningstallene. Dette blir veldig tydelig når vi øker den historiske estimeringsperioden til 50 dager. Her og i tilfellet med 20 dagers perioder ser vi også at EWMA metoden gir høyere

Figur 1.3 EWMA og uvektede data, 10 dagers estimeringsperiode.



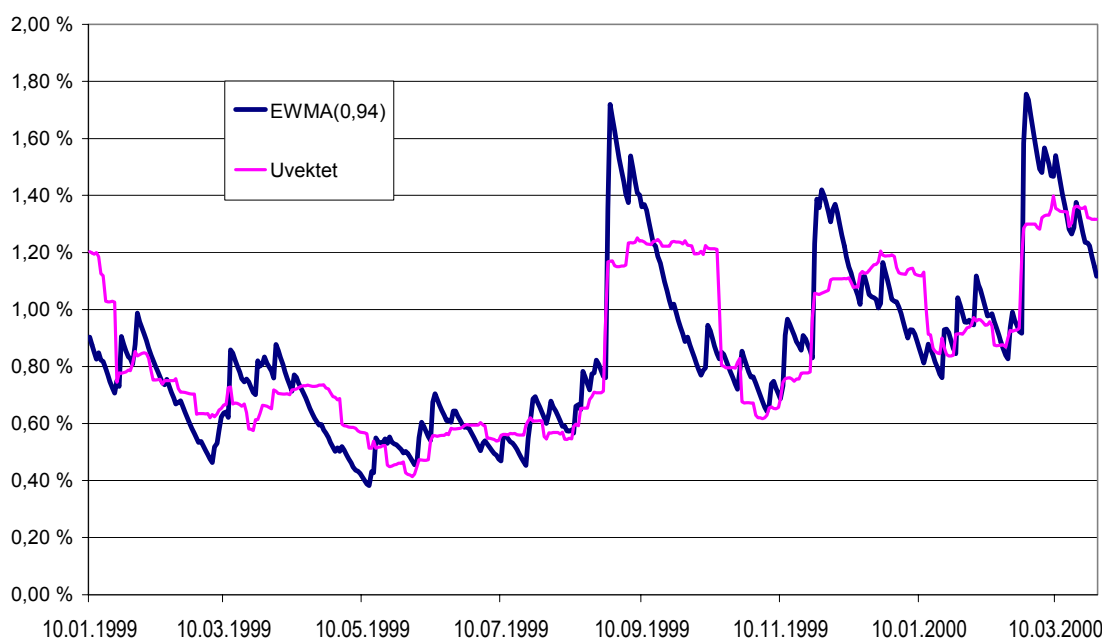
parameterverdier enn metoden som er basert på uvektede observasjoner, i perioder med høy volatilitet. At de uvektede parameterne varierer mindre skyldes nettopp at alle observasjonene innenfor estimeringsperioden teller like mye. Ved inngangen til en periode med store fluktuasjoner vil parameterne derfor "holdes nede" av de eldre og lavere avkastningstallene i

Figur 1.4 EWMA og uvektede data, 20 dagers estimeringsperiode.



den historiske perioden. På samme måte ser vi at parameterne som etterfølger en periode med høy volatilitet fremstår som kunstig høye helt til avkastningstallene med store fluktasjoner er utenfor den historiske estimeringsperioden. I figur 1.5 ser vi for eksempel at det store utslaget i avkastning som fant sted i slutten av august 1999 gir høye uvektede volatilitetsparametere helt frem til midten av oktober 1999, altså en periode på om lag 50 dager. EWMA-parameterne reagerer derimot raskere og ligger ved inngangen til desember 1999 betydelig lavere.

Figur 1.5 EWMA og uvektede data, 50 dagers estimeringsperiode.



Vi ser av uttrykket i likning (1.1) at summen av vektene er en endelig sum av en geometrisk rekke med n ledd. Summen av vektene inngår i nevneren på samme måte som n inngår i tilfellet med glidende gjennomsnitt og lik vektning av observasjonene. Ved bruk av EWMA for lange tidsserier benytter man ofte en tilnærming til formelen i likning (1.1). Siden nevneren i brøken til venstre i uttrykket konvergerer mot $1/(1-\lambda)$ når $n \rightarrow \infty$, kan man for store verdier av n , i stedet for formelen til høyre i (1.1) benytte formelen:⁴

$$\sigma_t = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i x_{t-i-1} . \quad (1.2)$$

Vi skal se senere at denne formelen har mange likhetstrekk med en såkalt IGARCH modell uten konstantledd. Hvis man for eksempel benytter denne metoden på en tidsserie av avkastningstall for en aksje med gjennomsnittlig avkastning $\bar{r} = 0$, får vi at $x = r^2$ i formel (1.2):

⁴ Feilen i forhold til å benytte den eksakte formelen i (1.1), vil avhenge både av størrelsen på λ og periodelengden n . Formel (1.2) gir lavere parameterverdier siden nevneren $(1 - \lambda^n)$ i (1.1) er mindre enn 1. F eks vil man for $n=50$ og $\lambda = 0,94$ observere at formel (1.1) gir 4,7 prosent høyere parameterverdier enn formel (1.2).

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i r_{t-i-1}^2. \quad (1.3)$$

Vi kan så omskrive likningen til et rekursivt uttrykk:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i r_{t-i-1}^2 = (1 - \lambda) \left[r_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i r_{t-i-1}^2 \right] = (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i r_{t-i-1}^2 = \\ &= (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i+1} r_{t-i-2}^2 = (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i r_{t-i-2}^2 = (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Det er formelen $\sigma_t^2 = (1 - \lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2$ som vanligvis benyttes til å beregne vektete historiske volatilitetsestimater. Vi ser at et estimat som beregnes ved tiden t påvirkes i mer eller mindre grad av kortsiktige bevegelser i avkastningstallene avhengig av størrelsen på koeffisienten $(1 - \lambda)$. Denne koeffisienten kalles derfor ofte for *reaksjonskoeffisienten*.

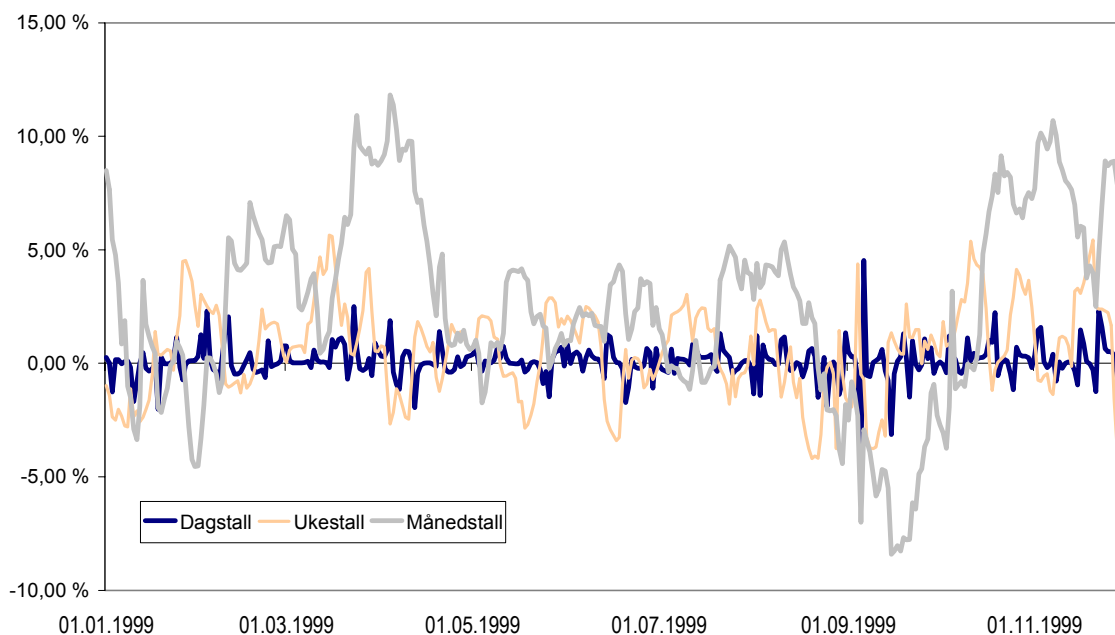
Koeffisienten foran den laggede variansen σ_{t-1}^2 , er vektingsparameteren λ . I denne sammenheng kan den betraktes som en *vedvarenhetskoeffisient* siden størrelsen på denne påvirker i hvor stor grad et estimat er påvirket av de foregående estimatene. I en EWMA modell er de to koeffisientene ikke uavhengige - tvert i mot så vil summen av dem alltid være lik én, men vi skal se at uavhengighet kan være tilfellet i en mer generell GARCH modell.

1.3 Skalering

Som nevnt ovenfor er de estimeringsmetodene som hittil er omtalt basert på at man estimerer en *konstant* volatilitetsparameter. Slik sett kan man si at de historiske metodene med og uten vektning kun er estimeringsmetoder og ikke et prognoseverktøy. Hvis man likevel vil lage en prognose basert på en enkel historisk estimeringsmetode, må man gjøre antagelsen om at dagens volatilitetsestimater er den beste prognosen på volatiliteten i fremtiden. Dette gjøres vanligvis ved å la dagens estimerte verdi for éndags-volatiliteten, være prognosen for éndags-volatiliteten for hver av de etterfølgende dagene. Under denne forutsetningen kan man på bakgrunn av volatiliteten over en tidshorison på én dag, si noe om volatiliteten over lengre tidshorisoner. Vi kan altså *skalere* opp éndags-estimatet til å være estimat for en tidshorison på for eksempel ti dager. Hvordan denne skaleringen kan gjøres avhenger av hvilke antagelser man har gjort om den tidsserien man betrakter. Hvis man for eksempel estimerer volatiliteten til en tidsserie av finansielle data som antas å være uavhengige og ha identisk sannsynlighetsfordeling, vil variansen over en tidshorison på t -dager være t ganger variansen over en tidshorison på én dag. Standardavviket kan dermed skaleres opp tilsvarende ved å multiplisere éndags-standardavviket med \sqrt{t} . Bruk av regelen om skalering med ”kvadratroten av tiden” vil være ekvivalent med antagelsene i en Black-Scholes modell om at volatiliteten er konstant i fremtiden. I en Black-Scholes modell er volatilitetsparameteren det annualiserte standardavviket til den underliggende tidsserien i modellen. Ved en annualisering – og en antagelse om 250 handledager per år - vil skaleringsfaktoren være $\sqrt{250}$ hvis man skalerer éndags-volatiliteter og $\sqrt{250/t}$ hvis man tar utgangspunkt i volatiliteten over en tidshorison på t dager. At regelen om skalering med kvadratroten av tiden impliserer konstant volatilitet ser man ved å betrakte følgende uttrykk

$$Ann. \ t\text{-dagers volatilitet} = \sqrt{(250/t) \cdot (t \cdot \sigma^2)} = \sqrt{250\sigma^2} = Ann. \ 1\text{-dags volatilitet}.$$

Figur 1.6 Avkastning Oslo Børs Totalindeks



Vi ser altså at en slik skalering impliserer at det ikke spiller noen rolle hvilken tidshorisont man tar utgangspunkt i når man skal skalere volatilitetsestimatene til annualiserte verdier, eller med andre ord at volatilitetsstrukturen er konstant over tid. Dette er en klar begrensning ved denne typen modeller. Empirisk har man observert at volatiliteten i finansielle serier har en tendens til å ”hope seg opp” innenfor kortere tidsperioder. Det kan derfor argumenteres for å benytte såkalte *betingede* volatilitetsparametre som varierer over tid. Såkalte GARCH modeller estimerer slike betingede parametre.

Eksempel 1.3 Skalering

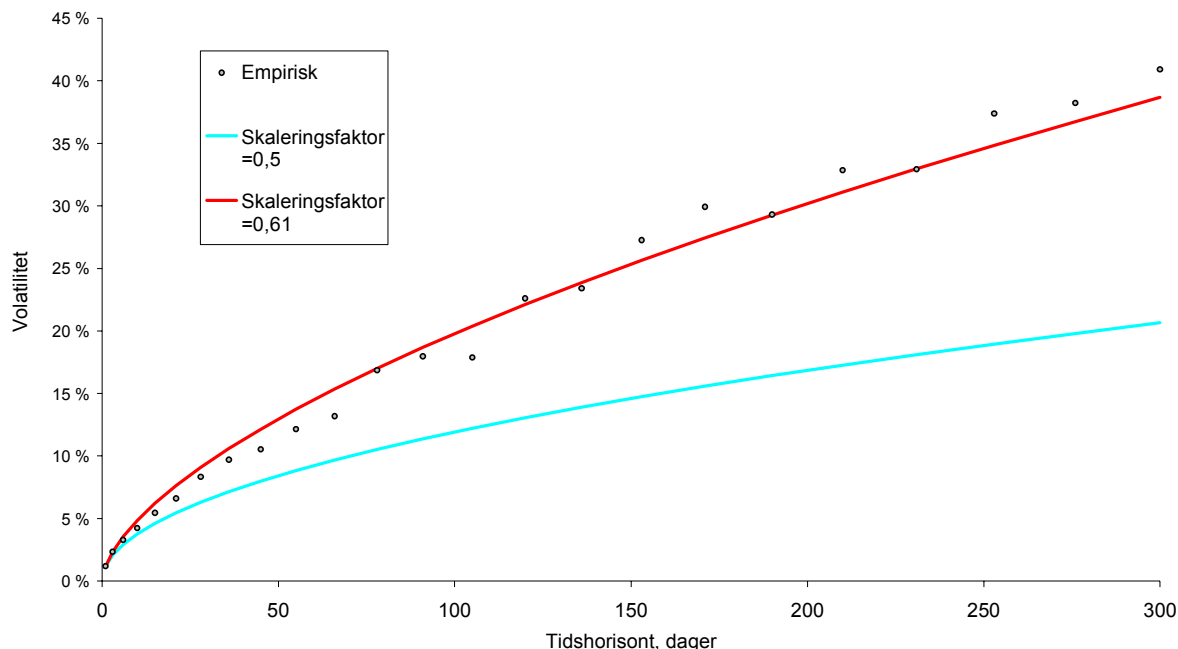
Figur 1.6 viser avkastningstall for Totalindeksen på Oslo Børs basert på forskjellige tidsintervaller. Uke- og månedstallene er beregnet løpende slik at man ved hvert tidspunkt ser henholdsvis siste uke og siste måneds avkastning. Vi ser at fluktuasjonene i tidsseriene er større jo lengre tidsperiode vi måler avkastningen over. Hvis vi for eksempel skal estimere den årlige volatiliteten for Totalindeksen er størrelsen på skaleringsfaktoren derfor avhengig av hvilken tidshorisont eller *skala* vi benytter når vi måler avkastningen.

Undersøkelser av avkastningsserier for ulike tidshorisonter viser imidlertid at skalering av volatilitetsparametre med roten av tiden, såkalt normalskalering, ikke sammenfaller med det man observerer empirisk (Skjeltorp (1996), (1998) m fl.). Å skalere med $t^{0,5}$ er ekvivalent med å benytte en *skaleringsfaktor* på 0,5.⁵ I undersøkelser av tidsserier for aksjer og aksjeindekser finner man som oftest skaleringsfaktorer som ligger høyere enn dette. For de fleste finansielle tidsserier ligger skaleringsfaktoren mellom 0,55 og 0,65. Figur 1.7 viser en sammenligning mellom empiriske avkastningstall for Oslo Børs Totalindeks ved ulike

⁵ I forbindelse med R/S-analyse kalles skaleringsfaktoren for Hurst-eksponenten. R/S-analyse står for Reskalert Variasjonsbreddeanalyse (Rescaled Range Analysis) og er en skaleringsanalyse som beregner hvordan størrelsen på fluktuasjonene i en tidsserie endrer seg når tidshorizonten øker. Se Skjeltorp (1998).

tidshorisonter, og skalering fra dagstall med skaleringsfaktorer på 0,5 og 0,61.⁶ Vi ser at kurven som svarer til en skaleringsfaktor på 0,61 ligger betydelig nærmere de empiriske volatilitetsestimatene.

Figur 1.7



Det er hovedsakelig to grunner til at man observerer høyere skaleringsfaktorer enn 0,5 for finansielle avkastningsserier. For det første fremviser de underliggende finansielle prisseriene ofte større drift enn en vanlig random walk prosess, og for det annet har de empiriske sannsynlighetsfordelingene for slike serier vist seg å ha tykkere haler enn normalfordelingen. Begge disse effektene bidrar til at en skalering med roten av tidshorisonen gir for lave volatilitetsestimater.

1.4 GARCH-modeller

GARCH er en forkortelse for *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Heteroscedasticity betyr nettopp ”varierende varians”, slik at conditional heteroscedasticity står for betinget varierende varians. En tidsserie som har den egenskapen at den innimellom perioder med lav volatilitet, viser kortere perioder med store fluktasjoner eller høy volatilitet, sier man at den fremviser *betinget heteroskedastisitet*. Som nevnt viser de fleste finansielle serier en slik oppførsel. For eksempel vil man ofte se en opphopning av volatilitet i en tidsserie av priser i forbindelse med offentliggjøring av ny informasjon til aktørene i markedet. Autoregressivitet betyr ”regresjon på seg selv” og viser til måten betinget heteroskedastisitet modelleres i GARCH modeller.

Et vesentlig moment for å forstå GARCH modeller er forskjellen mellom ubetinget og betinget volatilitet. Ubetinget volatilitet er en konstant parameter som estimeres på bakgrunn av alle observasjonene i tidsserien. Betinget volatilitet er en stokastisk prosess som varierer over tid avhengig av volatiliteten i tidsperioden forut for estimatet.

⁶ Takk til Johannes Skjeltop som utførte beregningene. Se for øvrig Skjeltop (1996).

For å illustrere forskjellen kan man tenke seg at man skal generere to tidsserier ved å trekke observasjoner fra bestemte sannsynlighetsfordelinger. I tilfellet med ubetinget volatilitet trekker man observasjoner fra den samme fordelingen ved hvert tidspunkt. Man trekker altså observasjoner fra en og samme sannsynlighetsfordeling, uavhengig av rekkefølgen i trekningene. Dermed vil observasjonene være uavhengige og identisk fordelt. Innenfor et rammeverk med betinget volatilitet kan man derimot tenke seg at man ved hvert tidspunkt trekker observasjoner fra *forskjellige* sannsynlighetsfordelinger. Fordelingene man trekker observasjoner fra, varierer over tid avhengig av verdien i de foregående trekningene. Det betyr altså at man etter en periode med høy volatilitet, vil trekke observasjoner fra en sannsynlighetsfordeling som har et stort standardavvik og omvendt. Observasjonene er således ikke uavhengige og heller ikke nødvendigvis identisk fordelt. Volatilitetsestimater som estimeres ved bruk av en slik modell vil derfor i seg selv være stokastiske prosesser siden de betinges av verdien til de foregående observasjonene i tidsserien.

Det finnes en rekke variasjoner av GARCH modeller, og et grundig studium av disse vil falle utenfor formålet med dette notatet. Det kan likevel være nyttig å gi et par eksempler på noen enkle varianter.

Grunnleggende for de enkleste GARCH modellene, er at den forventede betingede avkastningen modelleres ved en likning på formen $r_t = k + \varepsilon_t$, der k er en konstant og ε_t er en stokastisk variabel som angir den uforventede avkastningen. Variabelen ε_t er dermed et uttrykk for det forventede avviket i avkastning, siden konstantleddet k uttrykker den forventede avkastningen. Likningen for avkastningen kan utvides med ulike forklaringsvariabler for å gjøre modellen mer sofistikert, men man må forsikre seg om at estimeringsprosedyren konvergerer. I vanlige GARCH modeller antas ε_t å være betinget normalfordelt⁷ med betinget varians σ_t^2 . I tillegg til likningen som beskriver den gjennomsnittlige betingede avkastningen inneholder en GARCH modell en eller flere likninger som beskriver den betingede variansen. De ulike GARCH modellene avviker i hovedsak fra hverandre ved at likningene for den betingede variansen er spesifisert på ulike måter, eller ved forskjellige forutsetninger om fordelingen til variabelen ε_t .

Ved å ta kvadratrotten av de betingede variansparameterne som fremkommer av GARCH modellen og annualisere disse på vanlig måte, kommer man fram til et volatilitetsestimat som varierer med tiden. Til forskjell fra de historiske metodene som er beskrevet tidligere, er de ulike estimatene ved hvert tidspunkt ikke en prognose for volatiliteten over alle fremtidige tidshorisonter. Ved først å estimere parameterne i GARCH modellen, kan vi altså konstruere dynamiske volatilitetsestimater med den egenskapen at de ”vender tilbake til gjennomsnittet” slik man observerer at ofte er tilfelle med finansielle tidsserier.

1.4.1 ARCH

Den enkleste formen for en GARCH modeller er en såkalt ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) modell. Den kan uttrykkes ved at den betingede variansen modelleres ved likningen

⁷ Det er også vanlig å anta at variabelen følger en t -fordeling.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \quad (1.4)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \dots \alpha_p \geq 0$$

Betingelsene på koeffisientene sikrer at den betingede variansen er positiv. Modellen har et "minne" på p -observasjoner, og variansestimater varierer over tid avhengig av kvadratet av de foregående verdiene av de uforventede avkastningstallene ε_t . Effekten av dette er at en stor bevegelse i markedet innenfor modellens "minne" (de siste p observasjonene), vil gi et høyere volatilitetsestimat. Med andre ord vil modellen beskrive et mønster der store fluktuasjoner i en tidsserie etterfølges av store fluktuasjoner.

1.4.2 GARCH(p,q)

En generalisering av ARCH modellen er å legge til q autoregressive ledd i likning (1.4) slik at man inkluderer en vektet sum av de foregående volatilitetsestimaterne:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \quad (1.5)$$

$$\omega > 0, \alpha_1 \dots \alpha_p \geq 0, \beta_1, \dots, \beta_q \geq 0.$$

I likning (1.5) har modellen et "minne" på p og q tidsperioder med hensyn til henholdsvis avkastningstall ε_t og varians σ_t^2 . Det er vanlig å benytte $p=q=1$, slik at modellen bare har et minne på én tidsperiode:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

En slik variant betegnes GARCH(1,1). Dersom man i tillegg setter $\omega = 0$, $\alpha = (1 - \lambda)$ og $\beta = \lambda$ ser vi at GARCH(1,1) modellen er lik den EWMA-modellen vi betraktet i likning (1.3) i avsnitt 1.1.2.⁸ Forskjellen er imidlertid at vi her kan ha uavhengige koeffisienter foran leddene i modellen. I en EWMA-modell husker vi at summen av koeffisientene alltid var lik én. Koeffisientene i GARCH(p,q) modellene kan variere, men man må vanligvis oppgi betingelser på disse utfra hensynet til konvergens. I eksempelet med GARCH(1,1) modellen, kan man vise at koeffisientene må tilfredsstillere likningen

$$\alpha + \beta < 1.$$

Ved bruk av GARCH modeller for finansielle data, finner man ofte verdier av β på omkring 0,7 mens verdiene av parameteren α vanligvis er lavere enn 0,25. Størrelsen på disse parameterene innvirker på hvordan modellen reagerer ved ulike utslag i tidsserien modellen anvendes på. En høy β -verdi vil medføre at det tar lang tid før et stort utslag i den betingede volatiliteten "dør ut". På samme måte vil en høy α -verdi medføre at modellen reagerer raskt på store bevegelser i tidsserien. Parameteren ω bestemmer det langsiktige gjennomsnittet volatilitetsprognosene konvergerer mot.

⁸ Egentlig er ikke dette veldefinert, siden modellen ikke konvergerer når $\alpha + \beta = 1$. Vi har her å gjøre med en ikke-stasjonær GARCH modell som kalles en Integrated GARCH modell (IGARCH).

2 IMPLISITTE VOLATILITETSINDIKATORER

Som nevnt i innledningen skiller implisitte volatilitetsindikatorer seg fra statistiske indikatorer ved at førstnevnte ikke er basert på prisdata fra primærmarkedene. Implisitte volatilitetsindikatorer er utledet fra derivatpriser og angir således prisstillernes anslag for volatiliteten i derivatets underliggende instrument. Slike indikatorer kan være nyttige siden de gjenspeiler markedsaktørenes syn på den fremtidige usikkerheten i et instrument. I kapittel 3 gjennomgår vi hvordan man kan finne den implisitte volatiliteten til en opsjon og hvordan man kan tolke denne parameteren. Kapittel 4 omhandler metoder og teori for å utlede implisitte sannsynlighetsfordelinger fra et sett derivatpriser. Den implisitte sannsynlighetsfordelingen til et sett opsjonspriser gir et uttrykk for markedets vurdering av retningen på den fremtidige usikkerheten i opsjonenes underliggende. Siden implisitte indikatorer baserer seg på derivatpriser finner vi det hensiktsmessig å først gi en kort presentasjon av teorien for prising av derivater.

2.1 Om derivater – innledende teori

Et derivat kan defineres som et finansielt instrument hvis verdi avhenger av verdien av et annet underliggende instrument. Derivater kan konstrueres på en rekke ulike måter og således generere ulike kontantstrømmer betinget av verdien av det underliggende instrumentet derivatet er knyttet til. Konstruksjon og prising av derivater er utførlig beskrevet i en rekke lærebøker⁹, og det faller utenfor målsettingen med dette notatet å gå inn på dette temaet i hele sin bredde. Det er imidlertid nødvendig at leseren kjenner til oppbygningen av de mest utbredte typene derivater og noen sentrale begreper og metodiske prinsipper for prising av disse.

2.2 Terminkontrakter: Forward og futureskontrakter

De enkleste typene av derivatkontrakter er såkalte terminkontrakter. Det er i hovedsak to typer terminkontrakter: *Forward-* og *futureskontrakter*. En *forwardkontrakt* er en avtale om et fremtidig kjøp eller salg av et underliggende instrument til en forhåndsbestemt pris. Den forhåndsbestemte prisen kalles kontraktens *utøvelsespris* eller *forwardpris*. Tidsperioden fra kontrakten inngås til den forfaller utgjør kontraktens *løpetid*, og bestemmes ved kontraktsinngåelse.

Et eksempel på bruk av en forwardkontrakt kan være en bedrift som skal foreta en betaling i en utenlandsk valuta i fremtiden. Bedriften kan da velge å inngå en forwardkontrakt om kjøp av valutaen til en avtalt vekslingskurs for å eliminere kursrisikoen knyttet til betalingen.

Verdien av en forwardkontrakt vil avhenge av prisendringene i kontraktens underliggende instrument. Ved prisendringer i det underliggende instrumentet vil det derfor oppstå en fordring/gjeldsposisjon mellom partene i kontrakten. Fram til kontraktens forfall vil en av partene i kontrakten således være utsatt for kredittrisiko. En måte å redusere denne kredittrisikoen på er å foreta daglige oppgjør av kontrakten. Verdien av kontrakten fastsettes da til dagens markedsverdi og gjøres opp ved at det foretas betalinger mellom partene i kontrakten. En forwardkontrakt som gjøres opp daglig på denne måten kalles en *futureskontrakt* eller bare en *futures*. I avsnitt 2.4.1 nedenfor vil vi gå nærmere inn på hvordan man fastsetter verdien av slike kontrakter.

⁹ Se for eksempel Hull (1997), Björk (1998), eller Wilmott (1998).

2.3 Opsjoner

En opsjon er en kontrakt som gir innehaveren en rett, men ikke en plikt til å kjøpe eller selge et underliggende instrument til en forhåndsbestemt pris, på eller innen et tidspunkt i fremtiden.¹⁰ En opsjon skiller seg således fra en terminkontrakt ved at en opsjon ikke er en bindende avtale for innehaveren av kontrakten. En opsjon som gir innehaveren en rett til å kjøpe et underliggende instrument kalles en kjøpsopsjon eller en *call-opsjon*. Tilsvarende kalles en rettighet til å selge et underliggende instrument en salgsopsjon eller en *put-opsjon*. For innehaveren av en kjøpsopsjon vil kontantstrømmen ved forfallstidspunktet T kunne uttrykkes ved

$$\max(S_T - K, 0),$$

der K er den forhåndsbestemte *utøvelsesprisen*, og S_T er prisen på opsjonens underliggende instrument ved forfallstidspunktet T . Det tilsvarende uttrykket for en salgsopsjon er

$$\max(K - S_T, 0).$$

En kjøpsopsjon sies å være *in the money* hvis man på et tidspunkt t har at $S_t > K$. Tilsvarende sier man at opsjonen er *out of-* eller *at the money* dersom henholdsvis $S_t < K$ eller $S_t = K$.

Det omvendte vil være tilfellet for en salgsopsjon. Man skiller mellom to hovedtyper av kjøps- og salgsopsjoner. Såkalte *europiske* opsjoner gir innehaveren en rett til å kjøpe eller selge underliggende på et bestemt fremtidig tidspunkt. En opsjon som i tillegg gir innehaveren rettigheten til å utøve kontrakten på et valgfritt tidspunkt *innen* kontrakten forfaller kalles en *amerikansk* opsjon.

2.4 Arbitrasjepricing

Arbitrasje er et nøkkelbegrep ved prising av derivater. En arbitrasjemulighet kan defineres som en mulighet for å realisere en strengt positiv gevinst som er både kostnads- og risikofri. Et enkelt eksempel på en arbitrasjemulighet kan være to valutabanker som tilbyr ulike kurser i markedet: En bank tilbyr salg av dollar til kurs 9 NOK/USD, mens en annen tilbyr salg av kroner til kurs 9,10 NOK/USD. En aktør i markedet kan da gå til den ene valutabanken med 9 NOK og kjøpe én USD, for så å selge denne til den andre valutabanken for 9,10 NOK. Vedkommende har dermed sikret seg en kostnads- og risikofri gevinst. Å finne en arbitrasjemulighet i et likvid og transparent marked vil imidlertid ofte være svært vanskelig. Under forutsetning av at aktørene er rasjonelle, vil et prisbilde som avdekker en arbitrasjemulighet i et likvid og transparent marked raskt endre seg slik at arbitrasjemuligheten elimineres. Det er derfor rimelig å anta at det i et likvid marked ikke finnes arbitrasjemuligheter. Antagelsen om fravær av arbitrasjemuligheter er selve kjernen i den såkalte *Arbitrasjepricingsteorien* (APT). Med dette som utgangspunkt kan man komme fram til prismodeller for en rekke typer derivater.

¹⁰ Tilsvarende påtar utstederen av kontrakten seg en plikt til å kjøpe eller selge det underliggende instrumentet til den forhåndsbestemte prisen.

2.4.1 Prising av forward og futureskontrakter

Et hovedtrekk ved anvendelsen av arbitrasjepreisingsmodeller er at man konstruerer porteføljer som med sikkerhet genererer identiske kontantstrømmer. Siden kontantstrømmene er identiske, må prisen på porteføljene være like. Hvis dette ikke var tilfelle ville man hatt en arbitrasjemulighet.

Det er imidlertid nødvendig å gjøre visse antagelser utover betingelsen om fravær av arbitrasje. I de enkleste modellene for prising av derivater, er det vanlig å gjøre følgende antagelser:

- 1) *Alle aktører kan foreta inn- og utlån til samme rente*
- 2) *Rentesatsen er konstant*

La S_t være prisen på det underliggende instrumentet for en forwardkontrakt med utøvelsespris/forwardpris F_0 ved tiden $t \in [0, T]$, og $r > 0$ den konstante risikofrie renten. For innehaveren av en forwardkontrakt vil kontantstrømmen ved forfallstidspunktet T være

$$S_T - F_0.$$

Vi kan finne verdien på forwardkontrakten ved å betrakte to ulike porteføljer. En portefølje bestående av forwardkontrakten og en portefølje som består av underliggende og lån av $F_0 e^{-rT}$. Vi har dermed følgende porteføljestrategier:

	Verdi ved $t=0$	Kontantstrøm ved $t=T$
A) Forwardkontrakt	0	$S_T - F_0$
B) Kjøp av underliggende	S_0	S_T
Lån av $F_0 e^{-rT}$	$-F_0 e^{-rT}$	$-F_0$

Siden begge strategier gir samme kontantstrøm ved forfall $t=T$, må de også ha samme verdi ved $t=0$. Dermed har vi at $S_0 - F_0 e^{-rT} = 0 \Rightarrow F_0 = S_0 e^{rT}$. Det samme resonnerementet kan gjentas for alle tidspunkter $t \in [0, T]$, slik at vi kan sette opp følgende formel for forwardprisen

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}.$$

Et direkte resultat som fremkommer av likningen ovenfor er at forwardprisen konvergerer mot prisen på kontraktens underliggende ved forfall:

$$\lim_{t \rightarrow T} F_t = \lim_{t \rightarrow T} S_t e^{r(T-t)} = S_T.$$

En alternativ måte å komme fram til dette uttrykket for forwardprisen er å betrakte kontraktens underliggende direkte fremfor å betrakte kontantstrømmene. Man kan tenke seg

at man har to mulige handlingsstrategier for å skaffe seg det underliggende instrumentet S_t ved tiden $t=T$. En mulighet er å kjøpe det underliggende instrumentet og sitte med dette til forfall. Kostnaden ved forfall av denne strategien er $S_0 e^{rT}$. Alternativt kan man inngå en forwardkontrakt med forwardpris F_0 . Siden begge strategiene innebærer at man mottar det underliggende instrumentet S_t med verdi S_T ved forfall, må de koste det samme og følgelig er $F_0 = S_0 e^{rT}$ og $F_t = S_t e^{r(T-t)}$.

2.4.2 Prising av opsjoner

I motsetning til forward og futureskontrakter, innebærer et kjøp av en opsjonskontrakt at man kjøper seg rettighet uten at man er forpliktet til å benytte seg av rettigheten ved forfall. For denne rettigheten betaler kjøperen en pris, den såkalte *opsjonspremi* eller *opsjonsprisen*. Det finnes i hovedsak to måter å utlede størrelsen på denne premien.

En tilnæringsmåte er å starte med å spesifisere en statistisk modell for prisen på opsjonens underliggende og ut fra denne modellen utlede de statistiske egenskapene ved opsjonsprisen. Både opsjonen og dens underliggende er dermed antatt å følge en spesifikk stokastisk prosess med ulike parametere. Man konstruerer deretter en portefølje bestående av opsjonen og dens underliggende slik at risikoen i porteføljen er nøytralisert. Hvis prinsippet om fravær av arbitrasjemuligheter skal være oppfylt, må avkastningen på denne porteføljen være lik den risikofrie renten. Ved å konstruere en slik portefølje ender man opp med en partiell differensiallikning (PDE) som opsjonsprisen må tilfredsstille. Løsningen av denne likningen gir oss prisen på opsjonen.

Alternativt kan man utlede prisen på en opsjon ved bruk av mer avanserte matematiske metoder. Dette innebærer at man omskriver den stokastiske prosessen for opsjonens underliggende ved å endre sannsynlighetsmålet¹¹ slik at prosessen blir en såkalt *martingal*. En stokastisk prosess kalles en martingal dersom den forventede verdien av prosessen i framtiden er lik prosessens nåværende verdi.¹² De underliggende sannsynlighetene for den omformede prosessen kalles *martingalsannsynligheter* eller *risikonøytrale sannsynligheter*. Man betrakter deretter den neddiskonterte verdien av den fremtidige kontantstrømmen som opsjonen gir ved forfall og beregner opsjonspremi som forventningen av denne kontantstrømmen med hensyn til det risikonøytrale målet.

Begge de ovennevnte framgangsmåtene gir den berømte Black og Scholes (1973) formelen dersom man spesifiserer opsjonens underliggende til å følge en spesifikk stokastisk prosess.¹³

2.5 Black-Scholes modellen

Black og Scholes (1973) formelen er utvilsomt den mest anvendte formelen for prising av opsjoner og andre derivater. Rammeverket som formelen utledes i, kalles ofte for Black-Scholes modellen. I modellen antas opsjonens underliggende å være en kontinuerlig funksjon

¹¹ Et sannsynlighetsmål er en funksjon $P: \Omega \rightarrow [0,1]$ som tilordner et utfall en viss sannsynlighet.

¹² Martingalegenskapen kan uttrykkes matematisk ved $E[S_t | S_j, j < t] = S_j$.

¹³ En såkalt geometrisk brownsk bevegelse med konstant volatilitetsparameter.

av tiden, men det kan være hensiktsmessig å ta utgangspunkt i en diskret modell for å få et intuitivt bilde av modellen.

La S_t være verdien av et finansielt instrument ved tiden $t \in \{0, 1, \dots, N\}$. Hvis man antar at den kontinuerlige beregnede avkastningen $r_t = \ln(S_t / S_{t-1})$ er normalfordelt, kan man skrive

$$r_t = \mu + \sigma \varepsilon_t \quad \text{der } \varepsilon_t \sim N(0, 1).$$

Dette er ekvivalent med at $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$. Alternativt kan man skrive

$\ln(S_t) = \ln(S_{t-1}) + \mu + \sigma \varepsilon_t$ som gir at $S_t = S_{t-1} e^{(\mu + \sigma \varepsilon_t)} = S_{t-1} e^{r_t}$. Man sier da at S_t følger en lognormal fordeling, siden logaritmen til S_t er normalfordelt. Ved å betrakte avkastningen r_t på to etterfølgende tidspunkter t og $t+1$ finner man at

$$r_t + r_{t+1} \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$$

dersom avkastningen på to tidspunkter antas å være uavhengige. Uttrykket ovenfor indikerer at både forventningsverdien og variansen øker lineært med tiden. Dette er ekvivalent med å si at standardavviket øker med kvadratroten av tiden. Hvis man nå setter $P_t = \ln(S_t)$ er det derfor naturlig å anta at man vil ha følgende sammenheng i kontinuerlig tid

$$dP_t = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} \varepsilon_t.$$

Leddet $\sqrt{dt} \varepsilon_t$ er tilveksten til det man kaller en Brownsk bevegelse eller en Wiener prosess:

$$dW_t = \sqrt{dt} \varepsilon_t.$$

En Wiener prosess eller en Brownsk bevegelse kan så defineres som en aggregert samling av slike tilvekster:¹⁴

$$W_t = W_0 + \int_0^t dW_s.$$

En viktig egenskap ved en Brownsk bevegelse er at det er en martingal og at hvis prosessen ved et tidspunkt t har verdien x , er sannsynlighetsfordelingen for prosessen ved tiden T , gitt ved normalfordelingen $N(x, \sqrt{T-t})$. Dette innebærer at variansen er økende med kvadratroten av tiden akkurat som i den diskrete modellen. Sannsynlighetstetthetsfunksjonen for en Brownsk bevegelse er gitt ved

$$q(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}.$$

¹⁴ Wiener prosessen har egenskapene at ved startpunktet $t=0$ er $W_t = 0$, W_t tilvekstene er uavhengige, banene er kontinuerlige og $W_t \sim N(0, t)$.

Fra definisjonen av prosessen $P_t = \ln(S_t)$, kan man finne et uttrykk for prosessen $S_t = e^{P_t}$. Ved å anvende det såkalte Itos lemma¹⁵ finner man at S_t må tilfredsstillere likningen

$$dS_t = (\mu + \sigma^2 / 2)S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

For å gjøre notasjonen enklere skriver man ofte bare

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

En prosess som tilfredsstiller denne likningen kalles en ofte en *geometrisk brownsk bevegelse*.

Prisen på en opsjon kan uttrykkes som en funksjon av et underliggende instrument S_t som er en løsning av likningen ovenfor. Hvis vi for eksempel lar $C(S_t, t)$ være prisen på en europeisk kjøpsoppsjon¹⁶ ved tiden t , kan vi ved hjelp av Itos lemma finne et uttrykk for differensialet til denne prisen. Idéen til Black og Scholes (1973) var, som nevnt ovenfor, at man ved å konstruere en portefølje bestående av opsjonen og det underliggende instrumentet til opsjonen kunne konstruere en portefølje som var risikofri. Strategien bak en slik portefølje er at man selger kjøpsoppsjonen og kjøper $\frac{\partial C}{\partial S}$ enheter av det underliggende instrumentet til opsjonen.

Hvis vi lar $V_t(S_t, t)$ være verdien av denne porteføljen ved tiden t , har vi at

$$V_t(S_t, t) = \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t - C(S_t, t).$$

Siden vi allerede har uttrykket for differensialet til prisen $dC(S_t, t)$, kan vi finne et uttrykk for $dV_t(S_t, t)$ og vise at denne porteføljen er risikofri. Etter en del beregninger finner vi at

$$dV_t(S_t, t) = -\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - \frac{\partial C}{\partial t} dt.$$

Siden uttrykket for $dV_t(S_t, t)$ ikke inneholder leddet dW_t , må porteføljen være risikofri i tidsintervallet dt . Et risikofritt aktivum B_t kan modelleres ved $dB_t = rB_t dt$, der $r > 0$ er risikofri rente. I følge prinsippet om fravær av arbitrasje må vi følgelig ha at $B_t = V_t$, og vi ender opp med det som ofte kalles Black-Scholes likningen:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} = r C(S_t, t).$$

Ved å løse denne likningen under randbetingelsene $C(0, t) = 0$ og $C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$, ender vi opp med den berømte Black og Scholes (1973) formelen. Den første betingelsen sier

¹⁵ Itos lemma gir et uttrykk for en differensialet $df(P_t, t)$ til en avbildning $f(P_t, t)$. Avbildningen er her eksponentialfunksjonen i.e. $f(P_t, t) = e^{(P_t, t)}$.

¹⁶ Et analogt resonnement kan gjøres hvis man har en europeisk salgsoptions.

at opsjonen ikke har noen verdi dersom det underliggende instrumentet antar verdien 0 på et tidspunkt før opsjonen forfaller. Dette kan tolkes som en situasjon der man har en kjøpsopsjon på en aksje i et selskap som går konkurs. Den andre betingelsen er simpelthen et uttrykk for kontantstrømmen til kjøpsopsjonen ved forfallstidspunktet $t=T$. Black og Scholes løste likningen ved å omskrive likningen slik at den ble et spesialtilfelle av en likning hvis løsning allerede var kjent innen fysikken. I dag er det vanlig å anvende løsningsmetoden til Feynman og Kac. Vi skal ikke gå gjennom løsningen i detalj i dette notatet, men en løsningskisse er til stor hjelp når vi senere skal se på implisitte sannsynlighetsfordelinger.

Som nevnt ovenfor har vi at hvis en Brownsk bevegelse ved et tidspunkt t har verdien x , finner vi sannsynligheten for at den skal ha verdien y ved tiden T fra normalfordelingen $N(x, \sqrt{T-t})$. Det vil si at sannsynligheten bestemmes av arealet under tetthetsfunksjonen

$$q(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-x}{\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}.$$

Det kan vises at $q(x, y, t)$ tilfredsstillers likningen

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0,$$

og at et liknende resultat også gjelder for en geometrisk brownsk bevegelse. Vi har nemlig at hvis prosessen S_t tilfredsstillers $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, vil sannsynligheten for at den har verdien S_T ved tiden T være gitt ved en tetthetsfunksjon $q(S_t, S_T, t)$ som tilfredsstillers

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 q}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial q}{\partial S_t} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

Det kan vises at funksjonen $\phi(S_t, t) = E[\max(S_T - K, 0) | S_t, t] = \int_{S_T} \max(S_T - K, 0) q(S_t, S_T, t) dS$ også er en løsning av denne likningen¹⁷:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial \phi}{\partial S_t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Hvis vi så returnerer til Black-Scholes likningen, ser vi at venstresiden i denne er nesten lik som i likningen ovenfor:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} = r C(S_t, t).$$

En vesentlig forskjell er at μ er byttet ut med den risikofrie renten r , og at høyresiden er lik $rC(S_t, t)$. Det er derfor naturlig å anta at vi alternativt kan modellere prosessen S_t ved likningen $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$, og at en løsning av Black-Scholes likningen har form av den

¹⁷ Legg merke til at $\phi(S_t, t)$ har form av en betinget forventning.

betingede forventningen $\phi(S_t, t)$ med tillegg av en diskonteringsfaktor. Den eksakte løsningen av Black-Scholes likningen viser seg å være nettopp dette:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E^0[\max(S_T - K, 0) | S_t, t] = e^{-r(T-t)} \int_{S_T} \max(S_T - K, 0) q(S_t, S_T, t) dS.$$

Notasjonen E^0 indikerer at likningen som beskriver opsjonens underliggende er endret til å være $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Sannsynligheten for å gå fra S_t til S_T via $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$ kalles ofte for *risikonøytral*¹⁸. Funksjonen $q(S_t, S_T, t)$ i uttrykket for prisen $C(S_t, t)$ er den lognormale risikonøytrale tetthetsfunksjonen

$$q(S_t, S_T, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)} S_T \sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(S_T) - m}{m \sqrt{T-t}}\right)^2\right\},$$

$$\text{hvor } m = \ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t).$$

Ekvivalent kan vi si at logaritmen til S_T er normalfordelt med følgende risikonøytrale sannsynlighetsfordeling ved forfall T :

$$\ln S_T \sim N\left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{(T-t)}\right].$$

Vi ser altså at opsjoner kan prises som om markedsaktørene var risikonøytrale. Parameteren μ i Black-Scholes modellen er den eneste parameteren som er påvirket av markedsaktørenes risikopreferanser og det er viktig å legge merke til at Black-Scholes likningen ikke inneholder denne parameteren. Dette er grunnen til at heller ikke løsningen av likningen inneholder μ . Dette betyr imidlertid *ikke* at modelleringen av opsjonens underliggende ikke er influert av markedsaktørenes risikopreferanser. I likningen $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ vil μ være større jo mer risikoaverse markedsaktørene er.¹⁹ Intuisjonen bak at dette likevel ikke påvirker prisen på opsjonen, er at både neddiskonteringen og modelleringen av opsjonens underliggende påvirkes av markedsaktørenes risikopreferanser i motsatt retning, og at effekten på opsjonsprisen således elimineres.

Ved å beregne verdien av integralet i uttrykket for $C(S_t, t)$ i likningen ovenfor finner man den velkjente Black og Scholes (1973) formelen for en europeisk kjøpsopsjon:

$$C(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad \text{hvor}$$

$$d_1 = \left[\ln(S_t / K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] / \sigma \sqrt{T-t},$$

¹⁸ Risikonøytral betyr at modellen er upåvirket av aktørenes risikopreferanser. Et eksempel på risikonøytrale sannsynligheter er sannsynligheten for gevinst i Lotto.

¹⁹ Siden forventet avkastning, μ , er høyere desto større risikopremien er.

$$d_2 = [\ln(S_t / K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)] / \sigma\sqrt{T - t},$$

og $\Phi(x)$ er den kumulative tetthetsfunksjonen til en normalfordeling.

Inputparameterne i formelen er opsjonens tid til forfall $T - t$, verdien av opsjonens underliggende ved tiden t , den risikofrie renten r , utøvelsesprisen K og volatiliteten i opsjonens underliggende i tiden fram til forfall σ . Det er viktig å legge merke til at den eneste av disse parameterne som må estimeres av prisstilleren er volatilitetsparameteren σ . Siden man for en gitt opsjonspris kan utlede denne parameterens verdi, kalles parameteren ofte for opsjonens *implisitte volatilitet*. Estimering av denne parameteren er nærmere omtalt nedenfor.

2.5.1 Varianter av Black- Scholes formel

Black-Scholes formelen ovenfor gjelder for en europeisk kjøpsopsjon med et underliggende instrument S_t som ikke utbetaler dividende og som er beskrevet ved $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Modellen kan imidlertid lett utvides til å gjelde opsjoner med andre typer underliggende. Med utgangspunkt i resultatet fra avsnitt 2.4.1, om at en forward- eller futureskontrakt $F_t = S_t e^{r(T-t)}$ vil ha samme verdi som den underliggende kontrakten S_t ved forfall, dvs. $S_T = F_T$, følger det at kontantstrømmen ved forfall for en opsjon på en forward- eller futureskontrakt vil være identisk med kontantstrømmen for en opsjon direkte på det underliggende instrumentet S_t . Dermed kan man lett omskrive Black-Scholes formelen ovenfor til å gjelde opsjoner på forward- eller futureskontrakter:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} [F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)] \quad \text{hvor}$$

$$d_1 = [\ln(F_t / K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)] / \sigma\sqrt{T - t},$$

$$d_2 = [\ln(F_t / K) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)] / \sigma\sqrt{T - t}.$$

Denne varianten av Black-Scholes formelen kalles ofte for *Black-76* formelen. Formelen anvendes ofte for å prise indeksoptjoner siden disse ofte er opsjoner på futureskontrakter på indeksen.

Black-76 formelen kan på en enkel måte utvides til å gjelde valutaopsjoner. Hvis vi lar E_t være en valutakurs ved tiden t , definert som mengde innenlandsk valuta per utenlandsk valuta, kan en futureskontrakt på E_t uttrykkes ved $F_t = S_t e^{(r^D - r^F)(T-t)}$, der r^D og r^F er parametere for henholdsvis innenlandsk og utenlandsk rente. Ved å anvende Black-76 formelen med denne futureskontrakten som underliggende kan vi sette opp følgende uttrykk for prisen på en valutaopsjon:

$$C(S_t, t) = e^{-r^D(T-t)} [E_t e^{-(r^D - r^F)(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)] \quad \text{hvor}$$

$$d_1 = [\ln(E_t / K) + (r^D - r^F + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] / \sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_2 = [\ln(E_t / K) + (r^D - r^F - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)] / \sigma\sqrt{T-t}.$$

Formelen kalles ofte for *Garman-Kohlhagen* formelen.

2.6 Black-Scholes implisitt volatilitet

Den eneste parameteren i Black-Scholes formel som ikke kan observeres direkte er volatilitetsparameteren σ . For å beregne opsjonsprisen, er man derfor nødt til å finne et estimat for denne parameteren. Fra avsnitt 2.5 har vi at en opsjons underliggende i Black-Scholes modellen er beskrevet ved prosessen $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, og at dette innebærer at underliggende er lognormalt fordelt ved forfall:

$\ln S_T \sim N[\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma\sqrt{(T-t)}]$. For å estimere volatilitetsparameteren σ må man derfor ta utgangspunkt i logaritmiske avkastningstall for opsjonens underliggende $S(t)$ ²⁰

$$r_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right).$$

En enkel metode er å benytte estimatoren

$$\sigma^* = \frac{s(r_t)}{\sqrt{\tau}},$$

der $s(r_t)$ er standardavviket til de logaritmiske avkastningstallene r_t over en tidsperiode tilsvarende opsjonens løpetid og τ måleenheten i antall år.²¹ Parameteren σ i Black-Scholes formel kan altså tolkes som det annualiserte standardavviket til opsjonens underliggende aktivum gjennom opsjonens løpetid. Typiske verdier for parameteren er 0,20 – 0,40 (20-40%) pro anno. Som det fremgår av avsnitt 2.5 er Black-Scholes modellen en kontinuerlig tidsmodell, slik at det eksakte uttrykket for σ er standardavviket til den *kontinuerlig beregnede* avkastningen til opsjonens underliggende aktivum i løpet av ett år. Eksempel 2.1 viser hvordan man kan estimere σ for totalindeksen ved Oslo Børs på bakgrunn av tallene for indeksen fra 1. til 31. mars 2000.

²⁰ $S(t)$ er her en diskret tidsserie slik at $t \in \{0,1,2,\dots,n\}$.

²¹ $s(r_t) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}$

Fremfor å estimere σ ved å la $s(r_t)$ være det historiske standardavviket over en tidsperiode tilsvarende opsjonens løpetid, kan man naturligvis anvende mer avanserte estimeringsmetoder lik de som er beskrevet for statistiske volatilitetsindikatorer i kapittel 1. Hvilke metoder som er mest hensiktsmessige, vil blant annet avhenge av opsjonens løpetid og underliggende. For en diskusjon av dette, se Hull (1998).

Uheldigvis er det ikke mulig å invertere Black-Scholes formel slik at man kan finne den implisitte volatilitetsparameteren σ direkte når man kjenner opsjonsprisen C_t . I stedet er man nødt til å benytte en iterativ løsningsprosedyre der man ”gjetter” en verdi av σ og så beregner hvilken verdi opsjonen har med denne verdien av σ . Siden opsjonsprisen er voksende i variabelen σ - desto høyere volatilitet desto høyere verdi har opsjonen – kan man gjette seg fram til den riktige verdien av den implisitte volatiliteten. I praksis gjennomføres løsningsprosedyren enkelt ved hjelp av et dataprogram.

Eksempel 2.1 Estimering av σ for totalindeksen på Oslo Børs.

Dato	Stengningskurs (Indekspoeng)	Relativ kurs (dag/foreg. dag)	Log Avkastning LN(rel. kurs)	Avkastning
01.mar.00	1407,72			
02.mar.00	1394,21	0,990402921	-0,009643428	-0,00959708
03.mar.00	1404,01	1,00702907	0,007004481	0,00702907
06.mar.00	1411,37	1,005242128	0,005228436	0,00524213
07.mar.00	1448,52	1,026321943	0,025981482	0,02632194
08.mar.00	1443,28	0,996382515	-0,003624044	-0,00361749
09.mar.00	1440,02	0,997741256	-0,002261299	-0,00225874
10.mar.00	1437,3	0,998111137	-0,001890649	-0,00188886
13.mar.00	1398,57	0,973053642	-0,027316068	-0,02694636
14.mar.00	1411,2	1,009030653	0,00899012	0,00903065
15.mar.00	1374,44	0,973951247	-0,026394031	-0,02604875
16.mar.00	1370,52	0,997147929	-0,002856146	-0,00285207
17.mar.00	1359,96	0,992294895	-0,007734942	-0,0077051
20.mar.00	1364,42	1,003279508	0,003274142	0,00327951
21.mar.00	1350,38	0,989709913	-0,010343396	-0,01029009
22.mar.00	1364,7	1,010604422	0,01054859	0,01060442
23.mar.00	1369,02	1,003165531	0,003160531	0,00316553
24.mar.00	1375,33	1,004609136	0,004598547	0,00460914
27.mar.00	1362,74	0,990845833	-0,009196323	-0,00915417
29.mar.00	1350,67	0,991142845	-0,008896613	-0,00885716
30.mar.00	1323,93	0,980202418	-0,01999618	-0,01979758
31.mar.00	1345,27	1,016118677	0,01599015	0,01611868
		Standardavvik	0,013113342	0,01307876
		Estimert volatilitet	0,207340136	

Kolonne fire fra venstre i tabellen viser de daglige logaritmiske avkastningstallene

$$r_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right),$$

og estimatet σ beregnes ved å skalere opp standardavviket av disse. Hvis vi antar at vi har 250 handledager på Oslo Børs i løpet av et år blir $\tau = 1/250$, slik at

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} = 0,013113342 \cdot \sqrt{250} = 0,2073401364 \approx 0,21 = 21\% \text{ per år.}$$

Kolonne fem viser vanlige avkastningstall beregnet som indeksens relative vekst fra dag til dag, og vi kan se at tallkolonne fire og fem er tilnærmet like. Bakgrunnen for dette er at $\ln(S_t/S_{t-1}) \approx (S_t/S_{t-1}) - 1$ for små verdier av de kursendringene S_t/S_{t-1} . Siden de to beregningsmetodene ikke avviker i særlig grad, kan man sammenligne implisitt volatilitet med annualisert statistisk volatilitet uten at feilmarginene får særlig betydning.

2.6.1 Implisitt volatilitet som indikator

Implisitt volatilitet er en prognose for volatiliteten til en opsjons underliggende instrument i tidsperioden frem til opsjonens forfall. Selv om man også kan estimere instrumentets volatilitet over den samme tidsperioden ved hjelp av statistiske metoder slik det er beskrevet i kapittel 1 og ovenfor, må implisitt volatilitet betraktes på en annen måte. Grunnen er at både metodene som benyttes og dataene som estimatet er basert på, er forskjellig fra tilfellet med vanlige statistiske metoder. Bakgrunnsdataene ved beregning av implisitt volatilitet er opsjonspriser, mens de statistiske metodene som er beskrevet ovenfor tar utgangspunkt i tidsserier av prisene på et aktivum.

I praksis vil prisstillerne ikke kun støtte seg til estimeringsprosedyrer som vist i eksemplet ovenfor. Implisitt volatilitet vil også inkorporere prisstillerens individuelle forventninger knyttet til volatiliteten i opsjonens underliggende gjennom opsjonens løpetid. Implisitt volatilitet er derfor spesielt interessant som indikator for framtidig usikkerhet ulike markeder. Siden man i de fleste opsjonsmarkeder observerer ulik implisitt volatilitet for opsjoner med samme underliggende aktivum men ulike innløsningspriser, kan det være hensiktsmessig å anvende et vektet snitt av disse for å finne en samlet indikator for framtidig volatilitet i underliggende. Hvilke vekter man skal velge er ikke trivielt, men siden opsjonsprisen er mer følsom for volatilitetsendringer jo nærmere opsjonen er *at the money*, vil det være naturlig å vekte de implisitte volatilitetsparameterne deretter. (Se Hull (1997)).

3 IMPLISITTE SANNSYNLIGHETSFORDELINGER

I avsnitt 2.5 så vi at prisen på en europeisk kjøpsopsjon kunne skrives som

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E^0[\max(S_T - K, 0) | S_t, t] = e^{-r(T-t)} \int_{S_T} \max(S_T - K, 0) q(S_t, S_T, t) dS,$$

der

$$q(S_t, S_T, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}S_T\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(S_T) - m}{m\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}$$

er den risikonøytrale lognormale tetthetsfunksjonen for opsjonens underliggende S_t . At $q(S_T, S_t, t)$ er lognormal er som nevnt utledet fra forutsetningen om at S_t tilfredsstiller likningen

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Et resultat fra Breeden og Litzenberger (1978) gir oss imidlertid et uttrykk for $q(S_T, S_t, t)$ direkte fra uttrykket for opsjonsprisen. Ved å betrakte den partiell deriverte av opsjonsprisen $C(S_t, t)$, finner vi

$$\frac{\partial C}{\partial K} = e^{-r(T-t)} \left[-(K - K)q(K) - \int_K^{\infty} q(S_T) dS_T \right],$$

som gir at

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \right|_{K=S_T} = e^{-r(T-t)} q(S_T).$$

Vi har med andre ord at den annenderiverte av opsjonsprisen evaluert i punktet $K = S_T$, gir oss sannsynligheten for at opsjonens underliggende skal befinne seg i dette punktet ved forfall. Hvis vi har opsjonspriser for flere utøvelsespriser, kan vi derfor utlede hele tetthetsfunksjonen $q(S_T)$ uten på forhånd å ha spesifisert noen modell for opsjonens underliggende. Tetthetsfunksjonen $q(S_T)$ ekstrahert fra et sett opsjonspriser på denne måten kalles en risikonøytral *implisitt tetthetsfunksjon* eller en risikonøytral *implisitt sannsynlighetsfordeling*.

En nyttig observasjon er at vi ved å betrakte futures/forward priser²² kan finne forventningsverdien i den risikonøytrale fordelingen beskrevet av $q(S_T, S_t, t)$. La F_t være prisen på en forwardkontrakt med underliggende S_t ved tiden t . Siden kontrakten kan betraktes som et instrument som utbetaler $(S_T - F_t)$ ved forfall, kan verdien av kontrakten uttrykkes ved $e^{-r(T-t)} E^0[(S_T - F_t)|S_t, t]$. Og siden verdien av kontrakten må være lik 0 har vi at

$$e^{-r(T-t)} E^0[(S_T - F_t)|S_t, t] = 0 \quad \Rightarrow \quad F_t = E^0[S_T|S_t, t] = \int_{S_T} q(S_t, S_T, t) dS,$$

som viser at forwardprisen er lik forventningsverdien til den risikonøytrale fordelingen.

²² I en situasjon med konstant rente, vil disse være like.

3.1 Volatilitetssmilet og Black-Scholes

Et resultat av antagelsene i Black-Scholes modellen er at den implisitte volatilitetsparameteren σ er uavhengig av utøvelseskursen K . Dette følger av at likningen som beskriver opsjonens underliggende, $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$, ikke er påvirket av parameteren K . Hvis man betrakter implisitte volatiliteter for opsjoner²³ som en funksjon av ulike utøvelsespriser, vil denne funksjonen være en rett linje. Empiriske undersøkelser viser imidlertid at dette ikke er tilfellet. Studier av opsjonspriser i ulike markeder viser at grafen til en slik funksjon vanligvis er en konveks kurve. Kurven omtales ofte som *volatilitetssmilet*. Den viser at aktørene i markedet priser opsjoner som er mye *out of the money* eller *in the money* til en høyere volatilitet enn opsjoner med utøvelsespris nær S_t og at antagelsene i Black-Scholes modellen ikke er oppfylt. De empiriske funnene indikerer dermed at markedsaktørene forutsetter en annen beskrivelse av opsjonens underliggende enn den geometrisk brownske bevegelsen som ligger til grunn i Black-Scholes modellen. Ekvivalent kan vi si at antagelsen om at opsjonens underliggende er lognormalt fordelt ved forfall ikke er konsistent med den implisitte tetthetsfunksjonen man finner ved å studere markedets prising av opsjonene. Graden av konveksitet i volatilitetssmilkurven angir i hvor stor grad den implisitte tetthetsfunksjonen avviker fra antagelsen om lognormalitet. Videre indikerer graden av konveksitet hvor stor sannsynlighet markedsaktørene tilordner ekstreme utfall for S_T . Med andre ord vil en konveks volatilitetssmilkurve implisere at markedet tilordner en opsjons underliggende en mer ”tykkhalet” tetthetsfunksjon enn den lognormale. Helningen på volatilitetssmilkurven vil reflektere skjevheten i den implisitte tetthetsfunksjonen. En positiv helning innebærer at den implisitte tetthetsfunksjonen er mer positivt skjevfordelt enn den lognormale tetthetsfunksjonen man ville finne på bakgrunn av en rett volatilitetssmilkurve.

3.2 Estimeringsteknikker

Enhver variasjon i volatilitetssmilkurven vil altså gjenspeiles i en endring i den implisitte tetthetsfunksjonen. Som vist ovenfor kan man ved hjelp av Breeden og Litzenbergers (1978) resultat ekstrahere den implisitte tetthetsfunksjonen ved å betrakte et sett opsjonspriser med samme forfallsdato og ulike utøvelsespriser. For å finne et godt estimat for hele tetthetsfunksjonen er man imidlertid avhengig av å ha opsjonspriser for et relativt stort antall utøvelsespriser. I mange opsjonsmarkeder er dette dessverre ikke mulig, slik at man er tvunget til å anvende andre teknikker for å estimere den implisitte tetthetsfunksjonen. Man kan dele inn de ulike estimeringsteknikkene i fire hovedkategorier:

- i) Man gjør antagelser om den stokastiske prosessen som beskriver opsjonens underliggende, og utleder den implisitte tetthetsfunksjonen fra denne.
- ii) Den parametriske formen til den implisitte tetthetsfunksjonen spesifiseres på forhånd, og parameterne estimeres ved å minimere differansen mellom de observerte opsjonsprisene og de prisene som genereres av den spesifiserte tetthetsfunksjonen.
- iii) Man estimerer en parametriske form på prisfunksjonen $C(S_t, t)$ (enten direkte eller via volatilitetssmilkurven) og anvender deretter Breeden og Litzenbergers resultat for å finne tetthetsfunksjonen.

²³ Med samme løpetid for et gitt underliggende instrument.

- iv) Tetthetsfunksjonen estimeres uten å gjøre noen parametriske antagelser verken om prisfunksjonen, den underliggende prosessen eller tetthetsfunksjonen.

I avsnittene under vil vi gjennomgå noen av de mest anvendte metodene innenfor de fire hovedkategoriene. Fremstillingen er basert på Bahra (1997).

3.3 En diskret metode: Risikonøytrale histogrammer

Som vi viste ovenfor kan vi ved anvendelse av Breeden og Litzenbergers resultat finne den implisitte tetthetsfunksjonen i punktet $K = S_T$ ved å beregne den annenderiverte av funksjonsuttrykket for opsjonsprisen $C(S_T, t)$. Den implisitte tetthetsfunksjonen er da gitt ved

$$q(S_T) = e^{r(T-t)} \left. \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \right|_{K=S_T}.$$

Fra uttrykket ovenfor ser vi at det er nødvendig å ha opsjonspriser for uendelig mange utøvelsespriser for å kunne estimere en kontinuerlig tetthetsfunksjon. Dette er imidlertid ikke mulig i praksis. En tilnærming av dette uttrykket kan vi finne ved å betrakte den neddiskonterte²⁴ verdien av en såkalt *butterfly spread* opsjon med sentrum i punktet $K = S_T$. En butterfly spread er en kombinasjon av opsjoner.²⁵ I dette tilfellet selger man to kjøpsopsjoner med utøvelsespris $K = S_T$ og kjøper to kjøpsopsjoner med utøvelsespriser på henholdsvis $S_T - \Delta S_T$ og $S_T + \Delta S_T$, der ΔS_T er differansen mellom utøvelsesprisen for opsjonene. Vi kan så sette opp følgende uttrykk for den neddiskonterte verdien av denne kombinasjonen

$$q^d(S_T) = e^{r(T-t)} \left. \frac{[C(S_T + \Delta S_T, t) - C(S_T, t)] - [C(S_T, t) - C(S_T - \Delta S_T, t)]}{\Delta S_T} \right|_{K=S_T}.$$

Vi har da at

$$\lim_{\Delta S_T \rightarrow 0} \frac{q^d(S_T)}{\Delta S_T} = e^{r(T-t)} \left. \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \right|_{K=S_T}.$$

For å estimere et *implisitt histogram* kan vi benytte priser for kjøpsopsjoner med ulike utøvelsespriser K og beregne sannsynlighetstettheten for hver utøvelsespris ved hjelp av uttrykket for $q^d(S_T)$. Det er imidlertid en rekke svakheter med denne metoden. Den krever at kjøpsopsjonene handles til jevnt fordelte utøvelsespriser, og det finnes ingen systematisk måte å estimere "halene" i histogrammet.

²⁴ Med risikofri rente gir dette den risikonøytrale tetthetsfunksjonen.

²⁵ En butterfly spread kan konstrueres ut fra flere ulike kombinasjoner av kjøps- og salgsoptionspriser.

3.4 Direkte interpolering av callprisfunksjonen

For å kunne anvende Breeden og Litzenbergers resultat direkte er det nødvendig å finne et uttrykk for callprisfunksjonen $C(S_t, t)$. Interpolering av de observerte callprisene for å finne et slikt funksjonsuttrykk kan fremstå som et enkelt estimeringsproblem. Funksjonen $C(S_t, t)$ må imidlertid være to ganger deriverbar og tilfredsstillende visse konvekshets- og monotonisitsbetingelser for at man skal kunne anvende resultatet. Dette kan oppnås ved å benytte ulike estimeringsteknikker, der man legger slike betingelser på funksjonen. En metode er å anta at funksjonen har en spesiell parametrisk form og deretter estimere parameterne ved bruk av minste kvadraters metode.²⁶ Alternativt kan man foreta ikke-parametriske tilnærminger ved bruk av teknikker som ikke-parametrisk kernel regresjon, splines eller lignende. Et problem med ikke-parametriske metoder er at disse involverer et stort antall regressorer. Dette, kombinert med at man må beregne den annenderiverte av funksjonen, gjør at ikke-parametriske metoder er svært datakrevende.²⁷ Siden man i de fleste tilfeller har å gjøre med opsjonspriser for et relativt lite antall utøvelsespriser, viser det seg derfor å være praktisk talt umulig å implementere metoder for å estimere callprisfunksjonen $C(S_t, t)$ direkte.

3.5 Interpolering av volatilitetssmilet (Shimko 1993 m.fl.)

Et alternativ til å estimere callprisfunksjonen $C(S_t, t)$ direkte, er å foreta en interpolering av volatilitetssmilet og benytte Black-Scholes formelen til å transformere funksjonsuttrykket for volatilitetssmilet til et uttrykk for prisfunksjonen. Dette lar seg gjøre siden det er en entydig sammenheng mellom opsjonens implisitte volatilitet og opsjonsprisen. Den indirekte interpolerte callprisfunksjonen kan til slutt deriveres to ganger slik at man finner den implisitte tetthetsfunksjonen. I de fleste tilfeller vil imidlertid prosedyren gjennomføres numerisk. Fordelen med en slik framgangsmåte fremfor en direkte interpolering av $C(S_t, t)$ er at volatilitetssmilet ofte er glattere enn callprisfunksjonen, noe som gjør interpoleringen lettere. I Malz (1997) utvikles metoden ytterligere ved at volatilitetssmilet plottes mot opsjonenes deltaverdier i stedet for kontraktspriser og interpoleres i dette rommet. Effekten av denne transformasjonen er at avstanden mellom de implisitte volatilitetene for opsjoner nær *at the money* vil være større enn avstanden mellom de implisitte volatilitetene for opsjoner lenger unna *at the money*.

Interpolering av volatilitetssmilet vil ikke gi oss sannsynlighetstettheter for utøvelsespriser der det ikke finnes observerbare opsjonspriser. Utenfor dette området kan estimeringen for eksempel foretas ved å "lime" lognormale haler til hvert av endepunktene på den estimerte tetthetsfunksjonen på en slik måte at den totale kumulative sannsynlighetstettheten blir lik én.

3.6 Estimering av opsjonens underliggende prosess

I Black-Scholes modellen så vi at opsjonens underliggende S_t kunne beskrives av en geometrisk brownsk bevegelse gitt ved $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t$, og at dette impliserte at opsjonens underliggende er lognormalt fordelt ved forfall. Hvis man antar at opsjonens

²⁶ En ikke lineær variant av minste kvadraters metode.

²⁷ Det finnes imidlertid teknikker for å redusere dimensjonen på problemet, men en del av betingelsene som da må pålegges er nettopp av den art man ønsker å unngå ved ikke-parametrisk estimering.

underliggende følger en annen stokastisk prosess, kan man benytte de observerte opsjonsprisene til å estimere parameterne i prosessen. Den implisitte tetthetsfunksjonen kan deretter utledes fra egenskapene ved den estimerte prosessen på samme måte som vi viste for Black-Scholes modellen i forrige kapittel. I Malz (1996) anvender man for eksempel denne teknikken på valutaopsjoner, og antar at valutakursen følger en såkalt *jump-diffusion* prosess. Ved å studere observerte priser for en spesiell type kombinasjon av opsjoner kalt *risk-reversals*, kan man estimere parameterne i prosessen og utlede den implisitte tetthetsfunksjonen. Metoden er nærmere omtalt i Eitrheim, Frøyland og Røisland (1999).

3.7 Parametrisk tilnærming av den implisitte tetthetsfunksjonen

Fremfor å anta en spesifikk parametrisk form på den stokastiske prosessen til opsjonens underliggende, kan man gjøre antagelser om formen på den implisitte tetthetsfunksjonen direkte. Parameterne i den antatte tetthetsfunksjonen kan deretter estimeres ved å minimere differansen mellom de observerte opsjonsprisene og de opsjonsprisene som fremkommer av den antatte tetthetsfunksjonen. Dette vil være en mer generell metode enn å estimere hele den underliggende prosessen, siden det kan finnes flere prosesser som impliserer den samme tetthetsfunksjonen ved forfall. Metoden som beskrives nedenfor benyttes blant annet i Aguilar og Hörndahl (1999).

Innledningsvis viste vi at prisen på en kjøpsopsjon $C(S_t, t)$ og en salgsopsjon $P(S_t, t)$ kan skrives som henholdsvis

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_{S_T} \max(S_T - K, 0) q(S_t, S_T, t) dS$$

og

$$P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_{S_T} \max(K - S_T, 0) q(S_t, S_T, t) dS .$$

Ved å omskrive integralene finner vi følgende ekvivalente uttrykk

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S_T - K) q(S_t, S_T, t) dS_T$$

$$P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^K (K - S_T) q(S_t, S_T, t) dS_T .$$

I utgangspunktet står man ganske fritt i å spesifisere en parametrisk form på tetthetsfunksjonen $q(S_T)$ og estimere parameterne ved hjelp av en numerisk optimeringsprosedyre. Det er imidlertid en stor fordel ved å holde seg til såkalte Gaussiske funksjoner siden disse er de eneste som er stabile med hensyn til parametrisk form uansett hvilken tidshorisont man betrakter. Hvis vi for eksempel betrakter daglige observasjoner og disse kan beskrives ved en lognormal tetthetsfunksjon, vet vi at også månedlige observasjoner vil være lognormalt fordelt. Ingen andre klasser av tetthetsfunksjoner²⁸ er tilsvarende stabile. Når man i tillegg

²⁸ Med endelig varians.

observerer at en rekke finansielle aktiva kan modelleres relativt godt ved hjelp av lognormale tetthetsfunksjoner, virker det rimelig å ha som utgangspunkt at underliggende har form av en vektet sum av n lognormale tetthetsfunksjoner:

$$q(S_T) = \sum_{i=1}^n [\theta_i L(\alpha_i, \beta_i, S_T)],$$

hvor $L(\alpha_i, \beta_i, S_T)$ er den i 'te lognormale tetthetsfunksjonen med parametere

$$\alpha_i = \ln S + (\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t) \quad \text{og} \quad \beta_i = \sigma_i \sqrt{(T-t)}. \text{ Parameteren } \theta_i > 0 \text{ angir hvor stor vekt}$$

den i 'te lognormale tetthetsfunksjonen har, slik at $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$. Ved å sette inn uttrykket for

$q(S_T)$ inn i formlene for $C(S_t, t)$ og $P(S_t, t)$ ovenfor, kan vi finne teoretiske opsjonspriser for valgte sett med parametere. Ved å minimere kvadratet av differansen mellom disse prisene og de observerte opsjonsprisene, kan vi bestemme det optimale valget av parametere for å beskrive tetthetsfunksjonen. Hvis vi for eksempel velger $n=2$, det vil si vi antar at den implisitte tetthetsfunksjonen kan skrives som en sum av to lognormale tetthetsfunksjoner, har vi følgende uttrykk for de teoretiske prisene:

$$C^*(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty [\theta L(\alpha_1, \beta_1, S_T) + (1-\theta)L(\alpha_2, \beta_2, S_T)](S_T - K) dS_T$$

$$P^*(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty [\theta L(\alpha_1, \beta_1, S_T) + (1-\theta)L(\alpha_2, \beta_2, S_T)](K - S_T) dS_T .$$

Gitt at vi har r observerte kjøpsopsjonspriser og s observerte salgsopsjonspriser, ender vi opp med følgende minimeringsproblem:

$$\min_{\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta\}} \left[\sum_{j=1}^r (C_j - C_j^*)^2 + \sum_{j=1}^s (P_j - P_j^*)^2 \right],$$

der C^* og P^* er henholdsvis observerte kjøpsopsjonspriser og salgsopsjonspriser.

Som det fremgår av utledningen i kapittel 2 vil forventningsverdien til den risikonøytrale tetthetsfunksjonen $q(S_T)$ være lik futuresprisen på opsjonens underliggende. Differansen mellom den observerte futuresprisen og den futuresprisen som genereres fra den antatte implisitte tetthetsfunksjonen kan derfor legges til minimeringsproblemet. Hvis vi lar $F^*(t, T)$ være den observerte futuresprisen og den teoretiske futuresprisen være gitt ved

$$F(t, T) = \theta e^{(\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{2})} + (1-\theta) e^{(\alpha_2 + \frac{\beta_2^2}{2})},$$

har vi følgende uttrykk å minimere

$$\min_{\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta\}} \left[\sum_{j=1}^r (C_j - C_j^*)^2 + \sum_{j=1}^s (P_j - P_j^*)^2 + (F - F^*)^2 \right].$$

Minimeringsproblemet lar seg forholdsvis enkelt implementere i et dataprogram.

4 OPPSUMMERING

Både statistiske og implisitte volatilitetsindikatorer er nyttige for å få informasjon om usikkerheten i markeder for finansielle aktiva. Modeller for statistisk volatilitet tar utgangspunkt i historiske tidsserier for avkastningen til et finansielt instrument. På bakgrunn av tidsseriene søker man å finne en parameter som beskriver størrelsen på fluktuationene i serien. Det finnes i dag en rekke ulike statistiske volatilitetsmodeller. Disse varierer fra enkle modeller for historiske standardavvik til avanserte ARCH og GARCH modeller.

Implisitte indikatorer skiller seg fra statistiske indikatorer siden disse er estimert på grunnlag av derivatpriser og ikke priser fra primærmarkedene. Implisitte indikatorer reflekterer markedsaktørenes syn på framtidig usikkerhet og er derfor mer fremadskuende enn statistiske volatilitetsindikatorer. Prisen på en opsjon bestemmes blant annet på bakgrunn av volatiliteten i opsjonens underliggende. Prisstillerne i opsjonsmarkedet anvender en opsjonsprisindemodell med en parameter for volatiliteten i underliggende. Volatilitetsparameteren er den eneste parameteren i modellen som fastsettes av prisstilleren. Priser fra opsjonsmarkedet gir oss derfor muligheten til å beregne den *implisitte volatiliteten* til en opsjon. Hvis man har opsjonspriser for flere innløsningspriser kan man ved hjelp av ulike estimeringsteknikker utlede sannsynlighetsfordelingen til opsjonens underliggende ved forfall. Estimering av implisitte sannsynlighetsfordelinger gir et bilde av retningen på de implisitte volatilitetsindikatorene.

5 LITTERATUR

Alexander, Carol J. (ed) (1998): *Risk management and analysis. Vol. 1: Measuring and Modelling Financial Risk*. Wiley & Sons Ltd.

Aguilar, Javiera og Hördahl, Peter (1999): "Optionspriser och marknadens förväntningar." *Penning- och valutapolitik*, Sveriges Riksbank 1/1999.

Bahra, Bhupinder (1997): "Implied Risk-neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Applications." Bank of England Working Paper Series no 66.

Björk, Tomas (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.

Black, F. og Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, vol 81, no 3.

Breeden, D.T. og Litzenberger, R.H. (1978): "Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices." *Journal of Business*, vol 51, no 4.

Eitrheim, Øyvind, Frøyland, Espen og Røisland, Øistein (1999): "Kan prisen på valutaopsjoner si oss noe om markedets oppfatning av kronkursen?" *Penger og Kreditt* 2/99.

Hull, John C. (1997): *Options, Futures and other Derivatives*, 3. Edition, Prentice Hall Int. Inc.

Karatzas, Ioannis og Schreve, Steven E. (1998): *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag.

Malz, Allan (1996): "Using option prices to estimate realignment probabilities in the European Monetary System: The case of sterling-mark.", *Journal of International Money and Finance*, 15 pp. 717-748.

Malz, Allan (1997): "Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices." *The Journal of Derivatives* (Winter) pp. 20-36.

Rockinger, Michael (2001): "Forelesningsnotater fra kurset *Advanced topics in empirical finance* 19.-30 mars 2001", Studienzentrum Gerzensee, Sveits.

Shimko, David (1993): "Bounds of Probability." *Risk Magazine*, vol 6 No 4.

Skjeltorp, Johannes A. (1996): "Fractal Scaling Behaviour in the Norwegian Stock Market." *Master of Science Thesis in Financial Economics*, Bedriftsøkonomisk Institutt, 1996.

Skjeltorp, Johannes A. (1998): "Nye metoder innen risikoanalyse og kontroll – skalering i finansielle data." *Penger og Kreditt* 4/98.

Wilmott, P (1998): *Derivatives The theory and practice of financial engineering*, Wiley & Sons.

Nøkkelord:

Volatilitet

Implisitt volatilitet

Opsjonspris

Implisitte sannsynlighetsfordelinger